

ЮУрГУ
Кафедра ПМ и ДПМ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Группа: МТ-272

Вариант: №9

Выполнил: Спиридонов И.И.

Проверил: Щербакова А.О.

Челябинск, 2003 г.

ЗАДАЧА №1

Для данного положения механизма найти угловые скорости звеньев и линейные скорости указанных на схеме точек. Рассмотреть звенья, движущиеся плоско, с использованием трех методов:

- 1) теоремы о сложении скоростей;
- 2) мгновенного центра скоростей;
- 3) плана скоростей.

Заданная схема

$$AD = BD; O'C = BC = 2 OA$$

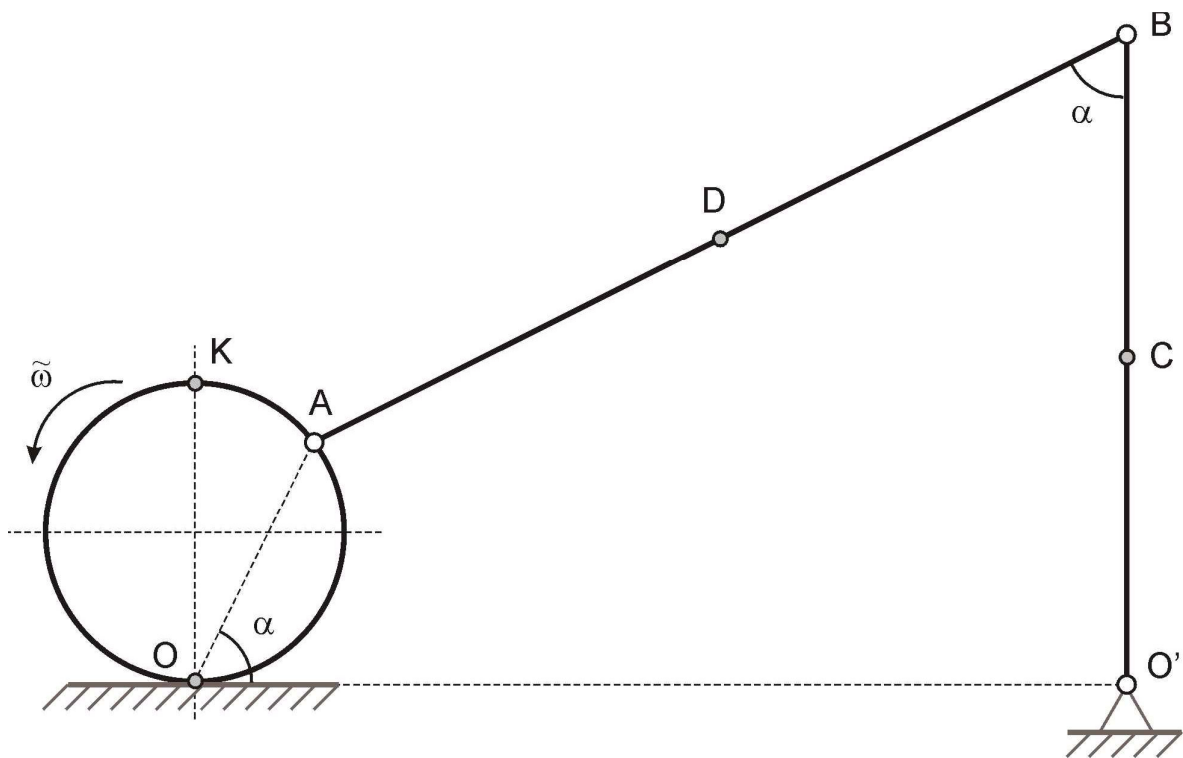
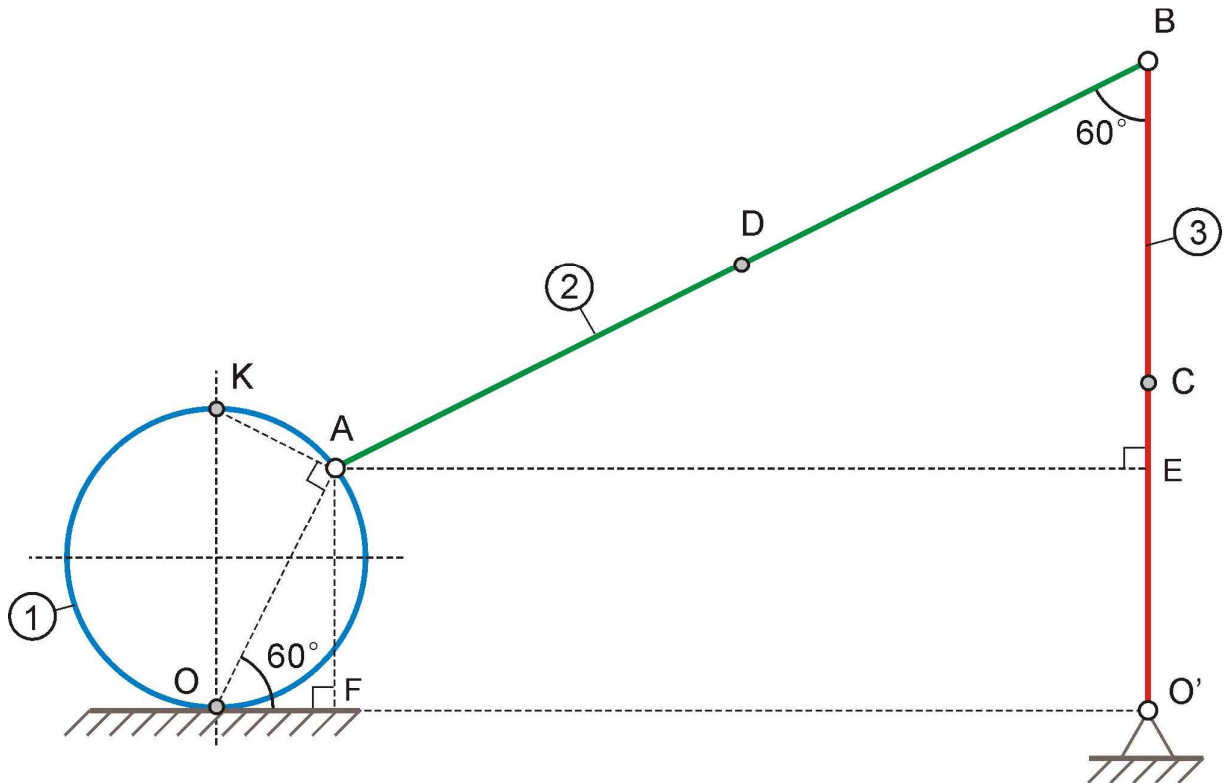


Таблица исходных данных

ВАРИАНТ	OA, м	α , град	ω , с ⁻¹	№ схемы
№9	0,6	60	1	I

Решение.



1. Определение геометрических параметров механизма.

Из прямоугольного треугольника ОКА:

$$OK = \frac{OA}{\cos 30} = \frac{2}{\sqrt{3}} OA = 1,16 \cdot 0,6 = 0,69 \text{ м};$$

Из прямоугольного треугольника ОАF:

$$AF = OA \sin 60 = 0,6 \sin 60 = 0,52 \text{ м};$$

$$BE = O'B - O'E = O'B - AF = 4 \cdot OA - AF = 4 \cdot 0,6 - 0,52 = 1,88 \text{ м};$$

Из прямоугольного треугольника АВЕ:

$$AB = BE / \cos 60 = 1,88 / 0,5 = 3,76 \text{ м}.$$

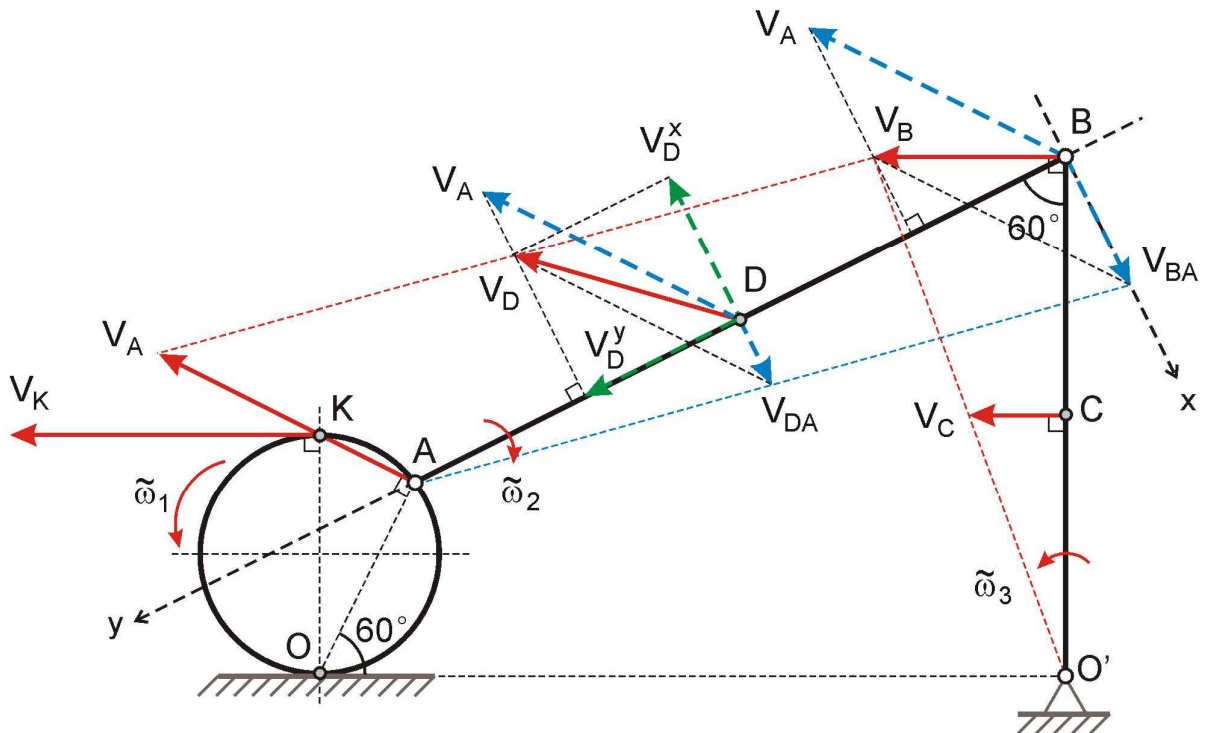
2. Обозначение элементов.

звено 1 – колесо (плоское движение);

звено 2 – шатун (плоское движение);

звено 3 – кривошип (вращательное движение вокруг центра O').

РЕШЕНИЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРЕМЫ О СЛОЖЕНИИ СКОРОСТЕЙ



3. Рассмотрим звено №1 (которое совершает плоское движение). Точка $O \in$ звену №1 и одновременно с этим – неподвижной поверхности, следовательно:

$$V_O=0;$$

Точка $A \in$ звену №1, следовательно, можно записать:

$$\bar{V}_A = \bar{V}_O + \bar{V}_{AO} = \bar{V}_{AO};$$

$$\bar{V}_{AO} \perp OA \text{ (по направлению } \tilde{\omega}_1);$$

$$V_{AO} = \omega_1 \cdot OA = 1 \cdot 0,6 = 0,6 \text{ м/с} \Rightarrow V_A = V_{AO} = 0,6 \text{ м/с};$$

Аналогично можно рассмотреть точку K :

$$\bar{V}_K = \bar{V}_O + \bar{V}_{KO} = \bar{V}_{KO};$$

$$\bar{V}_{KO} \perp OK \text{ (по направлению } \tilde{\omega}_1);$$

$$V_{KO} = \omega_1 \cdot OK = 1 \cdot 0,69 = 0,69 \text{ м/с} \Rightarrow V_K = V_{KO} = 0,69 \text{ м/с};$$

4. Рассмотрим звено №3.

Точка $B \in$ звену №3 (которое совершает вращательное движение), следовательно:

$$\bar{V}_B \perp O'B \text{ (по направлению } \tilde{\omega}_3), \omega_3 = V_B / O'B.$$

5. Рассмотрим звено №2. По теореме о проекциях скоростей двух точек твердого тела следует, что проекции скоростей V_A и V_B на ось y равны между собой:

$$(\bar{V}_A)_y = (\bar{V}_B)_y \Leftrightarrow V_A \cdot \cos 60 = V_B \cdot \cos 30;$$

отсюда,

$$V_B = V_A \cdot \cos 60 / \cos 30 = 0,35 \text{ м/с.}$$

6. Из пункта №4:

$$\omega_3 = V_B / O'B = 0,35 / 0,6 = 0,15 \text{ 1/с (против часовой стрелки).}$$

7. Рассмотрим звено №3. Точка $C \in$ звену №3 (которое совершает вращательное движение), следовательно:

$$\bar{V}_C \perp O'C \text{ по направлению } \tilde{\omega}_3;$$

$$V_C = \omega_3 \cdot O'C = 0,15 \cdot 2 \cdot 0,6 = 0,18 \text{ м/с.}$$

8. Рассмотрим звено №2. По теореме о сложении скоростей:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA};$$

выполним проекцию этого выражения на ось x :

$$-V_B \cdot \sin 30 = -V_A \cdot \sin 60 + V_{BA};$$

отсюда,

$$V_{BA} = V_A \cdot \sin 60 - V_B \cdot \sin 30 = 0,6 \cdot \sin 60 - 0,35 \cdot \sin 30 = 0,34 \text{ м/с;}$$

$$\omega_2 = V_{BA} / AB = 0,34 / 3,76 = 0,09 \text{ 1/с (по часовой стрелке).}$$

9. Рассмотрим звено №2.

$$V_{DA} = \omega_2 \cdot AD = \omega_2 \cdot AB / 2 = 0,09 \cdot 3,76 / 2 = 0,17 \text{ м/с.}$$

$$\bar{V}_{DA} \perp AB \text{ (по направлению } \tilde{\omega}_2).$$

По теореме о сложении скоростей: $\bar{V}_D = \bar{V}_A + \bar{V}_{DA}$,

выполним проекцию этого выражения на оси x и y :

$$x: -V_{Dx} = -V_A \cdot \sin 60 + V_{DA};$$

$$y: V_{Dy} = V_A \cdot \cos 60;$$

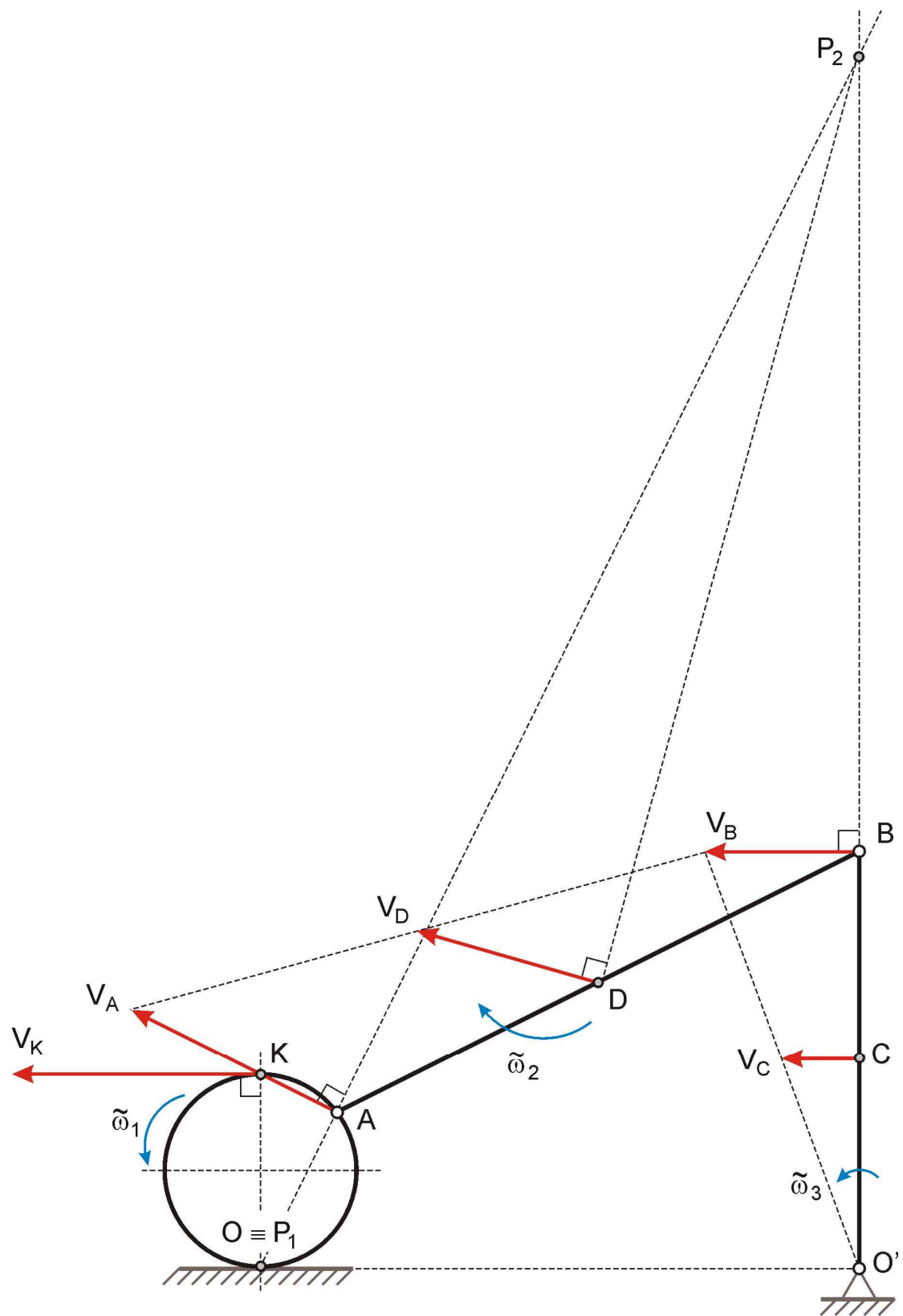
отсюда,

$$V_{Dx} = V_A \cdot \sin 60 - V_{DA} = 0,6 \cdot \sin 60 - 0,17 = 0,35 \text{ м/с;}$$

$$V_{Dy} = V_A \cdot \cos 60 = 0,6 \cdot \cos 60 = 0,3 \text{ м/с;}$$

$$V_D = \sqrt{V_{Dx}^2 + V_{Dy}^2} = \sqrt{0,35^2 + 0,3^2} = 0,46 \text{ м/с.}$$

РЕШЕНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МГНОВЕННОГО ЦЕНТРА СКОРОСТЕЙ



10. Точка P_1 – мгновенный центр скоростей звена №1 (так как она является точкой касания колеса с неподвижной поверхностью). Следовательно,

$$\bar{V}_A \perp OA \text{ по направлению } \tilde{\omega}_1;$$

$$V_A = \omega_1 \cdot OA = 1 \cdot 0,6 = 0,6 \text{ м/с.}$$

11. Точка P_2 – мгновенный центр скоростей звена №2 (пересечение перпендикуляров к векторам скоростей \bar{V}_A и \bar{V}_B).

Найдем расстояния от опорных точек звена №2 (A, B, D) до точки P_2 .

$$OO' = OF + FO' = OA \cdot \cos 60^\circ + AB \cdot \cos 30^\circ = 0,6 \cdot \cos 60^\circ + 3,76 \cdot \cos 30^\circ = 3,557 \text{ м;}$$

$$AP_2 = OP_2 - OA = OO' / \cos 60^\circ - OA = 3,557 / 0,5 - 0,6 = 6,507 \text{ м;}$$

$$BP_2 = O'P_2 - O'B = OP_2 \cdot \sin 60^\circ - 4 \cdot OA = 6,153 - 4 \cdot 0,6 = 3,753 \text{ м;}$$

$$DP_2 = (AP_2 - BP_2) / 2 = (6,507 - 3,753) / 2 = 1,377 \text{ м.}$$

12. Точка A \in звену №2 (которое совершает мгновенно-вращательное движение относительно мгновенного центра скоростей P_2), следовательно:

$$\omega_2 = V_A / AP_2 = 0,6 / 6,507 = 0,09 \text{ 1/с}$$

(отметим, что угловая скорость $\tilde{\omega}_2$ направлена по часовой стрелке – также как получилось в пункте №8 при использовании теоремы о сложении скоростей).

13. Точка D \in звену №2, следовательно:

$$V_D = \omega_2 \cdot DP_2 = 0,09 \cdot 4,112 = 0,37 \text{ м/с.}$$

$$\bar{V}_D \perp DP_2 \text{ по направлению } \tilde{\omega}_2;$$

14. Точка B \in звену №2, следовательно:

$$V_B = \omega_2 \cdot BP_2 = 0,09 \cdot 3,753 = 0,34 \text{ м/с;}$$

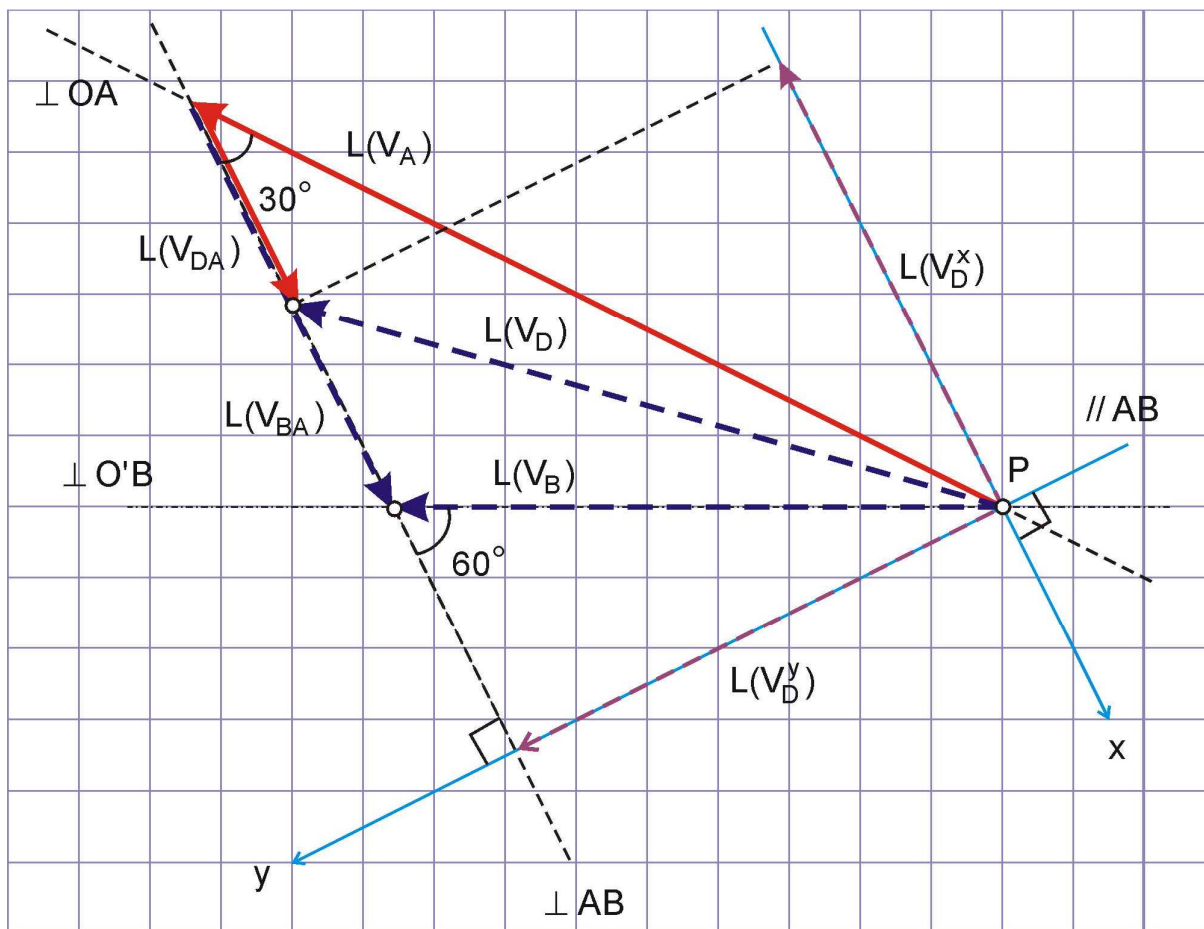
$$\bar{V}_B \perp BP_2 \text{ по направлению } \tilde{\omega}_2.$$

ПЛАН СКОРОСТЕЙ

(план скоростей изображается на миллиметровой бумаге)

$$\text{Масштаб: } m = \frac{V_A [\text{м/с}]}{L(V_A) [\text{м}]} = \frac{0,6}{127 \cdot 10^{-3}} = 4,724 [1/\text{с}];$$

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}, \quad \bar{V}_D = \bar{V}_A + \bar{V}_{DA}.$$



$$V_B = m \cdot L(V_B) = 4,724 \cdot 80 \cdot 10^{-3} = 0,38 [\text{м/с}];$$

$$V_D = m \cdot L(V_D) = 4,724 \cdot 103 \cdot 10^{-3} = 0,48 [\text{м/с}].$$

ЗАДАЧА №2

Кривошип OA кулисного механизма вращается с угловой скоростью ω .
Для заданного положения механизма требуется:

1. найти линейные скорости точек, указанных на схеме;
2. определить ускорения точек A и C , а также неизвестные ускорения звеньев;
3. построить планы скоростей и ускорений.

Заданная схема

$$O'A = BC = 2AB$$

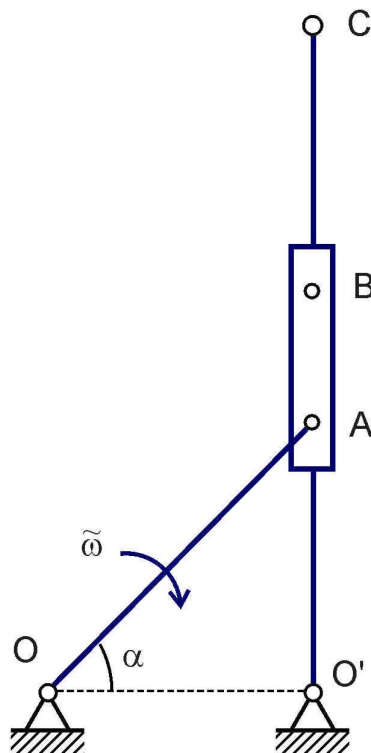
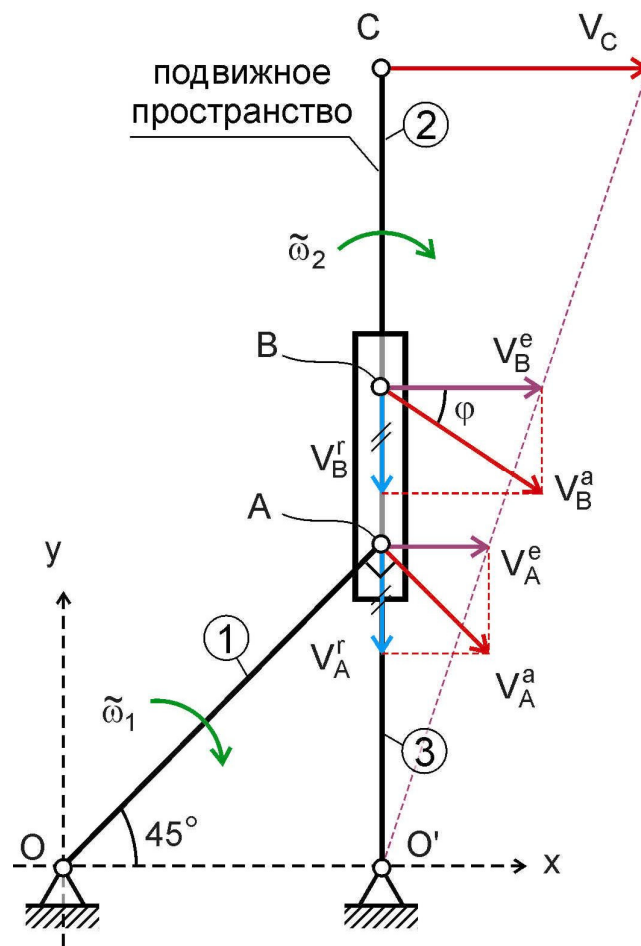


Таблица исходных данных

ВАРИАНТ	AB, м	α , град	ω , c^{-1}	№ схемы
№9	0,1	45	1	I

Решение.



1. Определение длины звена OA.

$$OA = O'A / \cos 45 = \sqrt{2} O'A = \sqrt{2} \cdot 0,2 = 0,28 \text{ м.}$$

2. Обозначение элементов.

звено 1 – кривошип (вращательное движение вокруг центра O);

звено 2 – кулиса (вращательное движение вокруг центра O');

звено 3 – ползун (плоское движение).

3. Точки A и B совершают сложное движение.

Подвижное пространство – кулиса.

4. Точка A ∈ звену №1 (которое совершает вращательное движение), следовательно:

$$\bar{V}_A \perp OA \text{ (по направлению } \tilde{\omega}_1 \text{);}$$

$$V_A = \omega_1 \cdot OA = 1 \cdot 0,28 = 0,28 \text{ м/с} \Rightarrow V_A = V_A^a = 0,28 \text{ м/с;}$$

5. По теореме о сложении скоростей при сложном движении точки:

$$\bar{V}_A^a = \bar{V}_A^r + \bar{V}_A^e; \quad (1)$$

абсолютная скорость точки А: $\bar{V}_A^a = \bar{V}_A \Rightarrow V_A^a = 0,28 \text{ м/с};$

относительная скорость точки А: $\bar{V}_A^r // O'C$ (величина неизвестна);

переносная скорость точки А: $\bar{V}_A^e \perp O'C$ (величина неизвестна).

Спроецируем выражение (1) на координатные оси:

$$x: V_A^a \cos 45 = V_A^e \Rightarrow V_A^e = 0,7 \cdot 0,28 = 0,2 \text{ м/с};$$

$$y: -V_A^a \sin 45 = -V_A^r \Rightarrow V_A^r = 0,7 \cdot 0,28 = 0,2 \text{ м/с}.$$

6. Угловая скорость вращения кулисы:

$$\omega_2 = \frac{V_A^e}{O'A} = \frac{0,2}{0,2} = 1 \text{ с}^{-1};$$

7. Рассмотрим точку В, совершающую сложное движение:

$$\bar{V}_B^a = \bar{V}_B^r + \bar{V}_B^e; \quad (2)$$

абсолютная скорость точки В неизвестна и по величине и по направлению;

относительная скорость точки В: $\bar{V}_B^r = \bar{V}_A^r \Rightarrow V_B^r = 0,2 \text{ м/с};$

переносная скорость точки В: $\bar{V}_B^e \perp O'C$ (по направлению $\tilde{\omega}_2$);

$$V_B^e = \omega_2 \cdot O'B = 1 \cdot 0,3 = 0,3 \text{ м/с}.$$

Скорость точки В;

$$V_B^a = \sqrt{(V_B^e)^2 + (V_B^r)^2} = \sqrt{0,3^2 + 0,2^2} = 0,37 \text{ м/с}.$$

Для нахождения направления скорости точки В спроецируем выражение (2) на координатную ось: например, на ось х:

$$x: V_B^a \cos \varphi = V_B^e \Rightarrow \cos \varphi = \frac{V_B^e}{V_B^a} = \frac{0,3}{0,37} = 0,81 \Rightarrow \varphi = 36^\circ.$$

8. Скорость точки С;

$\bar{V}_C \perp O'C$ (по направлению $\tilde{\omega}_2$);

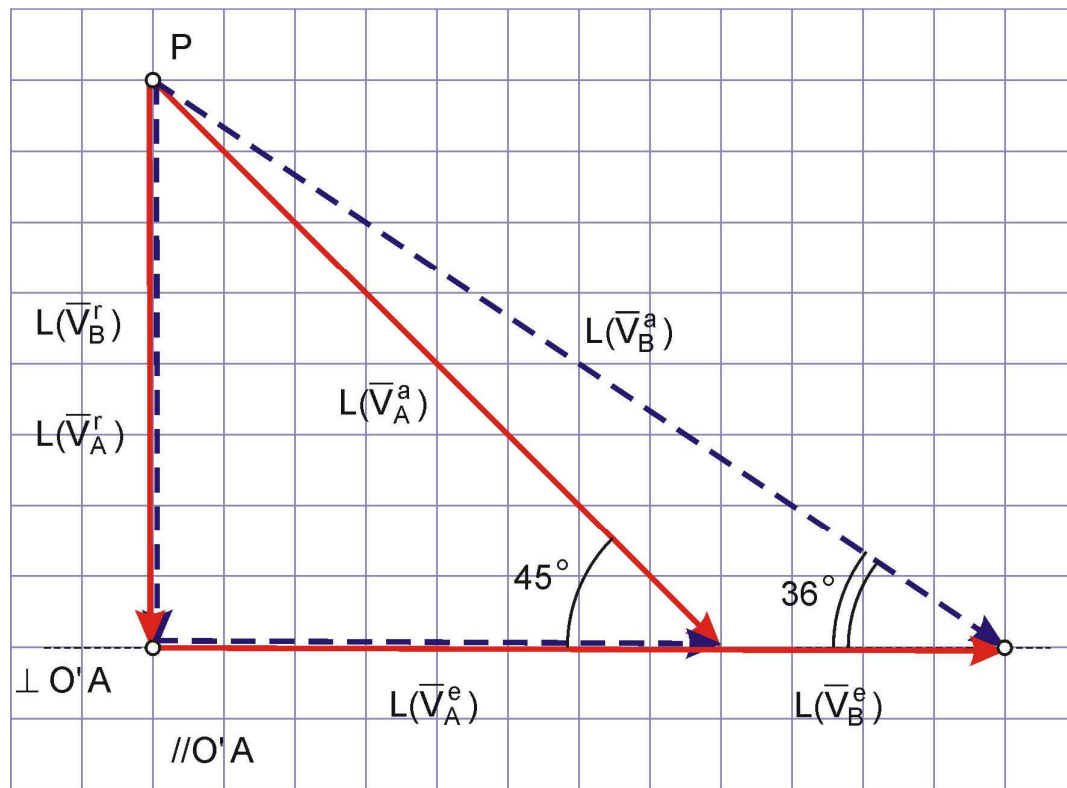
$$V_C = \omega_2 \cdot O'C = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ м/с}.$$

9. ПЛАН СКОРОСТЕЙ

$$\text{Масштаб: } m = \frac{V_A^a [\text{M/C}]}{L(V_A^a) [\text{M}]} = \frac{0,28}{112 \cdot 10^{-3}} = 2,5 [1/\text{C}];$$

$$\bar{V}_A^a = \bar{V}_A^r + \bar{V}_A^e;$$

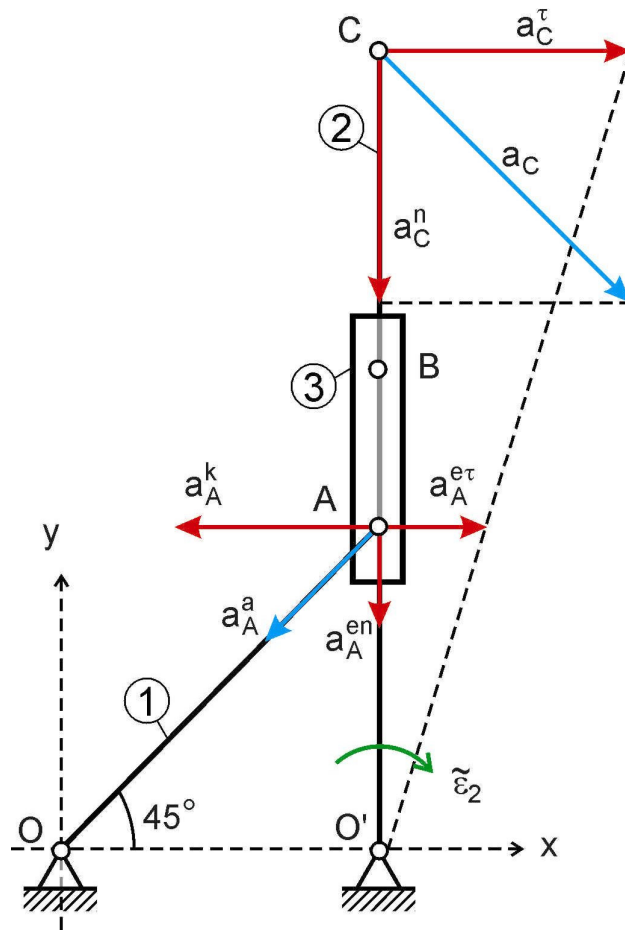
$$\bar{V}_B^a = \bar{V}_B^r + \bar{V}_B^e.$$



$$V_B^r = m \cdot L(V_B^r) = 2,5 \cdot 80 \cdot 10^{-3} = 0,2 [\text{M/C}];$$

$$V_B^e = m \cdot L(V_B^e) = 2,5 \cdot 80 \cdot 10^{-3} = 0,2 [\text{M/C}];$$

$$V_B^a = m \cdot L(V_B^e) = 2,5 \cdot 144 \cdot 10^{-3} = 0,36 [\text{M/C}].$$



10. По теореме о сложении ускорений при сложном движении точки:

$$\bar{a}_A^a = \bar{a}_A^r + \bar{a}_A^e + \bar{a}_A^k;$$

$$\bar{a}_A^{an} + \bar{a}_A^{at} = \bar{a}_A^r + \bar{a}_A^{en} + \bar{a}_A^{et} + \bar{a}_A^k; \quad (3)$$

$$\bar{a}_A^{an} \uparrow \downarrow OA; \quad a_A^{an} = \omega_1^2 \cdot OA = 1 \cdot 0,28 = 0,28 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^{at} = \varepsilon_1 \cdot OA = 0 \text{ (так как } \omega_1 - \text{const} \Rightarrow \varepsilon_1 = 0);$$

$$\bar{a}_A^r // O'C \text{ (величина неизвестна);}$$

$$\bar{a}_A^{en} \uparrow \downarrow O'A; \quad a_A^{en} = \omega_2^2 \cdot O'A = 1 \cdot 0,2 = 0,2 \text{ м/с}^2;$$

$$\bar{a}_A^{et} \perp O'A \text{ (величина неизвестна);}$$

$$a_A^k = 2\omega_2 V_A^r = 2 \cdot 1 \cdot 0,2 = 0,4 \text{ м/с}^2;$$

Перепишем векторное выражение (3) в следующем виде:

$$\bar{a}_A^a = \bar{a}_A^k + \bar{a}_A^{en} + \bar{a}_A^{et} + \bar{a}_A^r; \quad (4)$$

спроецируем это выражение на ось x :

$$x: -a_A^a \cos 45 = -a_A^k + a_A^{et};$$

$$a_A^{e\tau} = a_A^k - a_A^a \cos 45 = 0,4 - \frac{\sqrt{2}}{2} 0,28 = 0,2 \text{ м/с}^2;$$

11. Ускорение кулисы: $\epsilon_2 = \frac{a_A^{e\tau}}{O'A} = \frac{0,2}{0,2} = 1 \text{ с}^{-1};$

12. Ускорение точки С: $\bar{a}_C = \bar{a}_C^\tau + \bar{a}_C^n;$

$\bar{a}_C^\tau \perp O'A$ (в сторону $\tilde{\epsilon}_2$); $a_C^\tau = \epsilon_2 \cdot O'C = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ м/с}^2;$

$\bar{a}_C^n \updownarrow O'C$; $a_C^n = \omega_2^2 \cdot O'C = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ м/с}^2;$

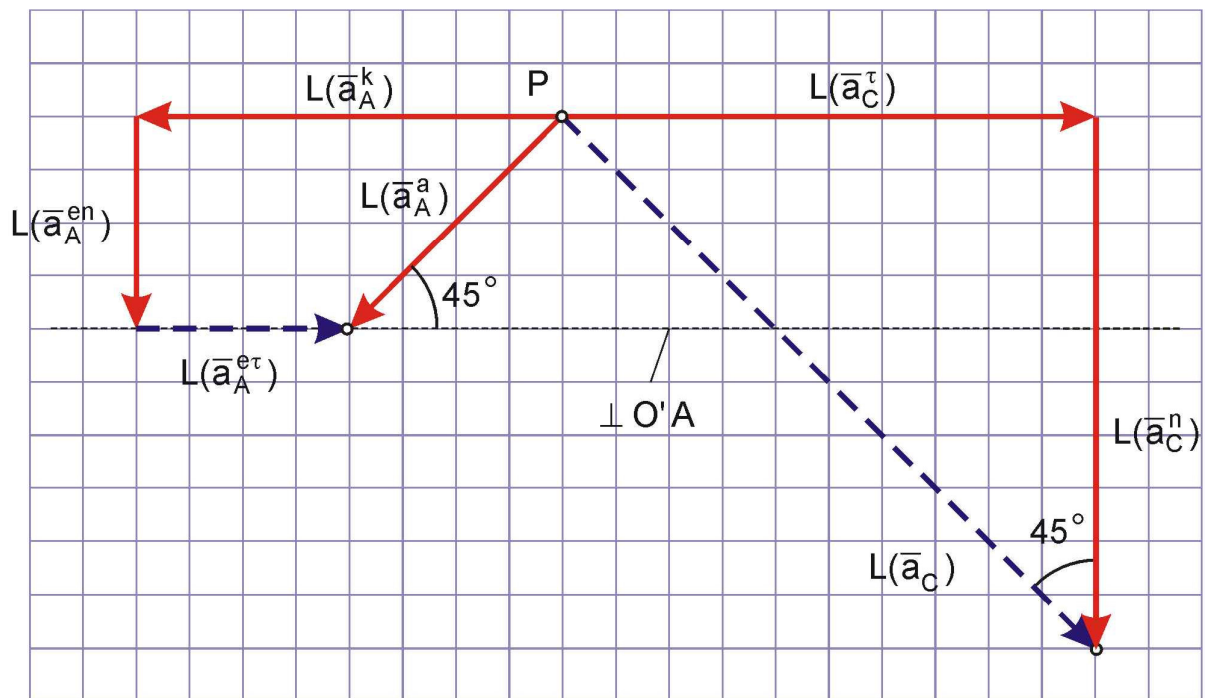
$$a_C = \sqrt{(a_C^\tau)^2 + (a_C^n)^2} = \sqrt{0,5^2 + 0,5^2} = 0,7 \text{ м/с}^2;$$

$$\cos \varphi_C = \frac{a_C^\tau}{a_C} = \frac{0,5}{0,7} = 0,71 \Rightarrow \varphi_C = 45^\circ.$$

13. ПЛАН УСКОРЕНИЙ

Масштаб: $m = \frac{a_A^k [\text{м/с}]}{L(a_A^k) [\text{м}]} = \frac{0,4}{60 \cdot 10^{-3}} = 6,67 [1/\text{с}];$

$$\bar{a}_A^a = \bar{a}_A^k + \bar{a}_A^{en} + \bar{a}_A^{e\tau} + \bar{a}_A^r; \quad \bar{a}_C = \bar{a}_C^\tau + \bar{a}_C^n.$$



$$a_A^{e\tau} = m \cdot L(V_C) = 6,67 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 0,2 [\text{м/с}];$$

$$a_C = m \cdot L(V_C) = 6,67 \cdot 107 \cdot 10^{-3} = 0,7 [\text{м/с}].$$