ПРИМЕР ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧИ №25

Спиридонов А.Б., МТ-292
вариант 2163

Задача №25

Условие задачи

К стальному валу приложены пары сил с моментами $\boldsymbol{M}$ *и* $\boldsymbol{M_1}$.

Требуется определить из условия прочности неизвестные размеры вала и округлить их до ближайшей величины по ГОСТ 6636-69, а также вычислить максимальный угол поворота поперечного сечения вала (в град).

Для этого необходимо:

1) построить эпюру крутящего момента (в долях $\boldsymbol{M}$*);*

2) построить эпюру максимальных (для каждого типа поперечного сечения) касательных напряжений (в долях $\boldsymbol{M/D^3}$*) и изобразить распределение касательных напряжений для каждого типа поперечного сечения;*

3) построить эпюры относительных (в долях $\boldsymbol{M/GD^4}$*) и абсолютных (в долях* $\boldsymbol{Ml/GD^4}$*) углов закручивания.*

Принять: $\boldsymbol{M} = 3$ кНм; $\boldsymbol{l} = 30$ см; $[\boldsymbol{n}] = 2$; $\tau_T = 300$ МПа; $\boldsymbol{G} = 0{,}8 \cdot 10^5$ МПа.

Заданная схема

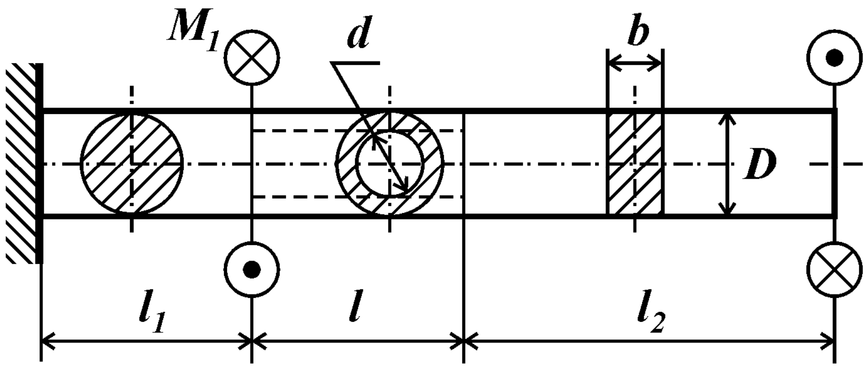
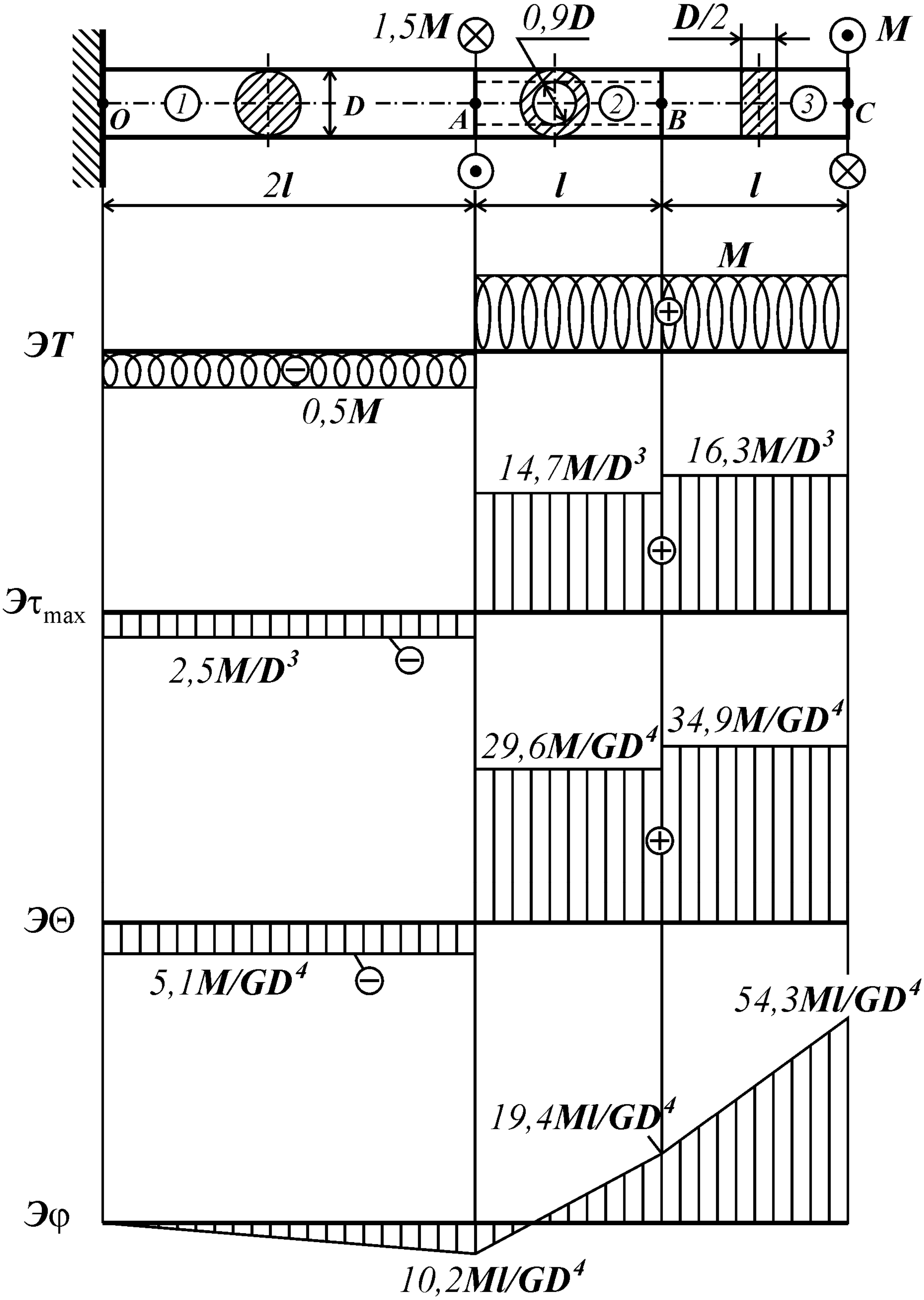


Таблица исходных данных

2		1		6	3
l_1/l	l_2/l	d/D	b/D	M_1/M	№ схемы
2	1	0,9	0,5	1,5	III

Решение



1,5M
0,9D
D/2
M
O
1
D
A
2
B
3
C
2l
l
l
M
ЭT
0,5M
14,7M/D³
16,3M/D³
Эτmax
2,5M/D³
29,6M/GD⁴
34,9M/GD⁴
ЭΘ
5,1M/GD⁴
54,3Ml/GD⁴
19,4Ml/GD⁴
Эφ
10,2Ml/GD⁴

Запишем условие прочности вала при кручении:

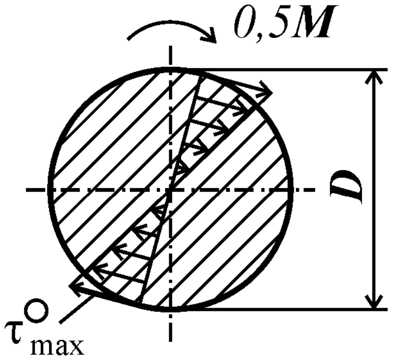
$$\max \tau_{\max} \le [\tau] = \frac{\tau_T}{[n]};$$

$$[\tau] = \frac{\tau_T}{[n]} = \frac{300 \cdot 10^6 \text{ Па}}{2} = 150 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$\max \tau_{\max} = \max\left(\left| \tau^{\circ}_{\max} \right|, \left| \tau^{\circledcirc}_{\max} \right|, \left| \tau^{\square}_{\max} \right| \right).$$

Определим максимальные касательные напряжения на каждом участке вала:

1. Рассмотрим участок №1:

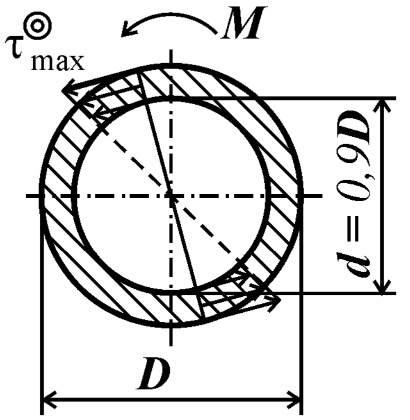


$$\tau^{\circ}_{\max} = \frac{T^{\circ}}{W_p^{\circ}}, \qquad T^{\circ} = -0{,}5\boldsymbol{M};$$

$$W_p^{\circ} = \frac{\pi \boldsymbol{D}^3}{16} \approx 0{,}2\boldsymbol{D}^3;$$

$$\tau^{\circ}_{\max} = \frac{-0{,}5\boldsymbol{M}}{0{,}2\boldsymbol{D}^3} = -2{,}5\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{D}^3}.$$

2. Рассмотрим участок №2:

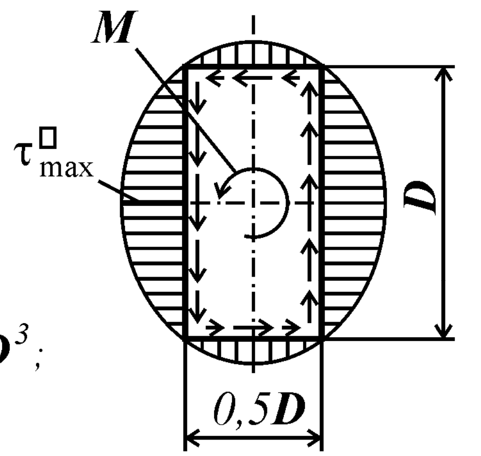


$$\tau^{\circledcirc}_{\max} = \frac{T^{\circledcirc}}{W_p^{\circledcirc}}, \qquad T^{\circledcirc} = \boldsymbol{M};$$

$$W_p^{\circledcirc} = \frac{\pi \boldsymbol{D}^3}{16}\left[1 - \left(\frac{0{,}9\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{D}}\right)^4\right] \approx 0{,}068\boldsymbol{D}^3;$$

$$\tau^{\circledcirc}_{\max} = \frac{\boldsymbol{M}}{0{,}068\boldsymbol{D}^3} = 14{,}7\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{D}^3}.$$

3. Рассмотрим участок №3:



$$\alpha = 0{,}246\,, \quad \beta = 0{,}229\,;$$

$$\tau^{\square}_{\max} = \frac{T^{\square}}{W^{\square}_{k}}\,, \qquad T = M;$$

$$W^{\square}_{k} = \alpha D b^2 = 0{,}246\,D\cdot(0{,}5D)^2 = 0{,}123D^3;$$

$$\tau^{\square}_{\max} = \frac{M}{0{,}123D^3} = 16{,}26\frac{M}{D^3}\,.$$

Определим из условия прочности размеры вала:

$$16{,}26\frac{M}{D^3} \le [\tau]; \quad D = \sqrt[3]{\frac{16{,}26\cdot M}{[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16{,}26\cdot 3\cdot 10^3\ \text{Н}\cdot\text{м}}{150\cdot 10^6\ \text{Па}}} = 0{,}069\,\text{м}.$$

Параметр	D	$b = 0{,}5D$	$d = 0{,}9D$
Расчетное значение, мм	69	34,5	62,1
Значение по ГОСТ 6636-69, мм	71	34	63

Определим максимальный угол закручивания сечений, для чего рассчитаем относительные углы закручивания на каждом участке и построим эпюру абсолютных углов закручивания:

$$\theta^{\bigcirc} = \frac{T^{\bigcirc}}{GI^{\bigcirc}_{p}} = \frac{-0{,}5M}{G\cdot\dfrac{\pi D^4}{32}} = -5{,}1\frac{M}{GD^4}\;;$$

$$\theta^{\circledcirc} = \frac{T^{\circledcirc}}{GI^{\circledcirc}_{p}} = \frac{M}{G\cdot\dfrac{\pi D^4}{32}\cdot\left(1-\left(\dfrac{d}{D}\right)^4\right)} = \frac{M}{G\cdot\dfrac{\pi D^4}{32}\cdot(1-0{,}9^4)} = 29{,}6\frac{M}{GD^4};$$

$$\theta^{\square} = \frac{\boldsymbol{T}^{\square}}{\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{I}_k^{\square}} = \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{G}\,\beta \boldsymbol{D}\boldsymbol{b}^3} = \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{G} \cdot 0{,}229\,\boldsymbol{D}(0{,}5\,\boldsymbol{D})^3} = 34{,}9\,\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{G}\boldsymbol{D}^4}.$$

Абсолютные углы закручивания сечений O, A, B и C:

$\varphi_O = 0$ *(угол поворота сечения в заделке всегда равен нулю);*

$$\varphi_A = \varphi_O + \Delta\varphi_1 = \varphi_O + \theta^{\circ}\boldsymbol{l}_1 = 0 - 5{,}1\,\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{G}\boldsymbol{D}^4}\,2\boldsymbol{l} = -10{,}2\,\frac{\boldsymbol{M}\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{G}\boldsymbol{D}^4};$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \Delta\varphi_2 = \varphi_A + \theta^{\circledcirc}\boldsymbol{l}_2 = -10{,}2\,\frac{\boldsymbol{M}\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{G}\boldsymbol{D}^4} + 29{,}6\,\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{G}\boldsymbol{D}^4}\,\boldsymbol{l} = 19{,}4\,\frac{\boldsymbol{M}\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{G}\boldsymbol{D}^4};$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \Delta\varphi_3 = \varphi_B + \theta^{\square}\boldsymbol{l}_3 = 19{,}4\,\frac{\boldsymbol{M}\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{G}\boldsymbol{D}^4} + 34{,}9\,\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{G}\boldsymbol{D}^4}\,\boldsymbol{l} = 54{,}3\,\frac{\boldsymbol{M}\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{G}\boldsymbol{D}^4}.$$

Судя по эпюре абсолютных углов закручивания, максимальный угол поворота поперечного сечения вала равен:

$$\max\varphi = \varphi_C = 54{,}3\,\frac{\boldsymbol{M}\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{G}\boldsymbol{D}^4} = 54{,}3\,\frac{3 \cdot 10^3\,\text{Н} \cdot \text{м} \cdot 0{,}3\text{м}}{0{,}8 \cdot 10^{11}\,\text{Па} \cdot (0{,}071\text{м})^4} =$$

$$= 0{,}024\,\text{рад} = 0{,}024\,\text{рад} \cdot \frac{180^\circ}{\pi\ \text{рад}} = 1{,}38^\circ$$

ПРИМЕР ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАЧИ №25

Сидоров И.А., МТ-292
вариант 1234

Задача №26

<u>Условие задачи</u>

Для стальной балки требуется:
1) подобрать из расчета на прочность по наибольшим напряжениям размеры сечений трех типов:
- *двутавровое поперечное сечение;*
- *прямоугольное сечение высотой $h=2b$;*
- *круглое поперечное сечение диаметром d.*

2) для каждого типа поперечного сечения балки вычислить наибольшие касательные напряжения в поперечном сечении;
3) вычертить найденные сечения в одном масштабе на миллиметровой бумаге формата А4, показать размеры сечений, изобразить распределение нормальных и касательных напряжений;
4) найти соотношение весов соответствующих балок $G^{\text{I}}:G^{\square}:G^{\bigcirc}$, приняв вес двутавровой балки за единицу $G^{\text{I}}=1$.
Принять: длину $l=0,7$ м, остальные исходные данные взять из табл. 26 и приложения 9.

Заданная схема

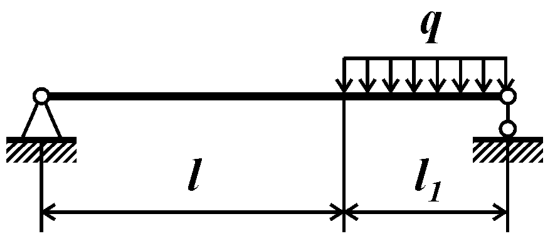
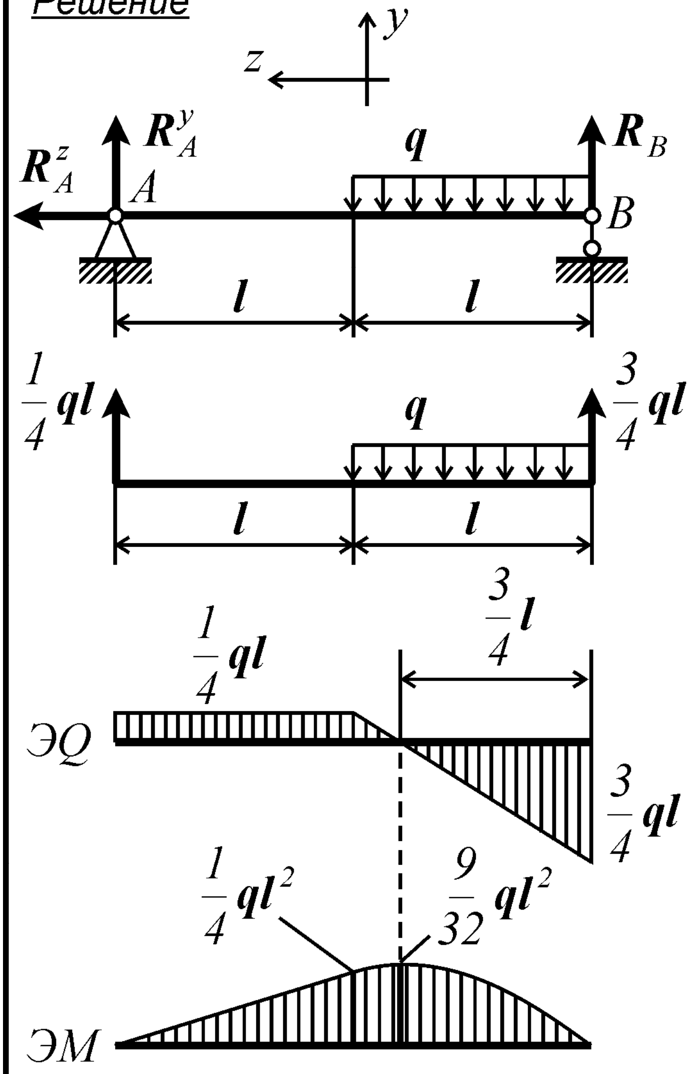


Таблица исходных данных

1	2	3		4	
l_1/l	q,кН/м	k	№ схемы	материал	$[n]$
1,0	80	-	I	Сталь 20	1,75

Предел текучести материала составляет $\sigma_{0,2} = 220$ МПа.

Решение



1. Найдем реакции шарнирных опор и построим эпюры поперечной силы и изгибающего момента.

Уравнения равновесия балки:

$$\begin{cases} \sum F_z = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_A^z = 0 \\ 2R_B l - \frac{3}{2}ql^2 = 0 \\ \frac{1}{2}ql^2 - 2R_A^y l = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R_A^z = 0 \\ R_B = \frac{3}{4}ql \\ R_A^y = \frac{1}{4}ql \end{cases}$$

Проверка:

$$\sum F_y = 0 \quad \frac{1}{4}ql - ql + \frac{3}{4}ql = 0.$$

2. Из условия прочности по максимальным напряжениям найдем момент сопротивления поперечного сечения.

Допускаемое напряжение $[\sigma] = \dfrac{220 \text{ МПа}}{1{,}75} = 126 \text{ МПа}.$

Условие прочности при изгибе $|\max\sigma| = \dfrac{\max M}{W_x} \le [\sigma].$

Момент сопротивления

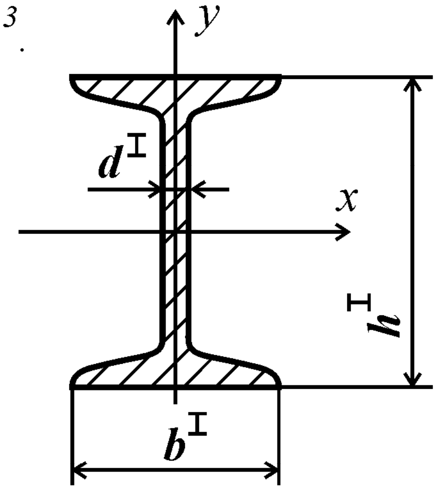
$$W_x \ge \frac{\max M}{[\sigma]} = \frac{9}{32}\frac{ql^2}{[\sigma]} = \frac{9}{32} \cdot \frac{80 \cdot 10^3 \, Н/м \cdot (0{,}7 м)^2}{126 \cdot 10^6 \, Па} =$$

$$= 8{,}77 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 87{,}7 \text{ см}^3.$$

3. *По таблице сортамента прокатной стали найдем номер двутавра*

Согласно условию $\boldsymbol{W_x} \geq 87{,}7$ см^3, *выбираем* <u>*двутавр №16*</u>

с моментом сопротивления $\boldsymbol{W_x^{\rm I}} = 109{,}0$ см^3.



Размеры двутавра:

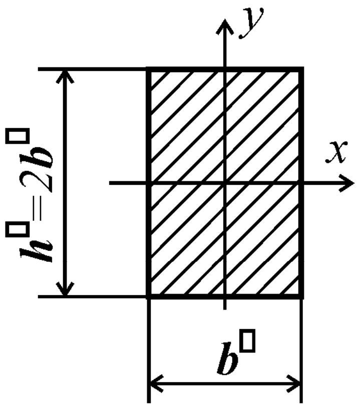
$\boldsymbol{h^{\rm I}} = 160$ мм $= 16$ см;

$\boldsymbol{b^{\rm I}} = 81$ мм $= 8{,}1$ см;

$\boldsymbol{d^{\rm I}} = 5$ мм $= 0{,}5$ см.

Площадь двутавра $\boldsymbol{S^{\rm I}} = 20{,}2$ см^2.

4. *Вычислим размеры и площадь прямоугольного поперечного сечения:*



$$W_x^{\square} = \frac{b^{\square}(h^{\square})^2}{6} = \frac{b^{\square}(2b^{\square})^2}{6} = \frac{2}{3}(b^{\square})^3 \geq 87{,}7 \text{ см}^3;$$

$$b^{\square} \geq \sqrt[3]{\frac{3}{2}\cdot 87{,}7 \text{см}^3} = 5{,}09 \text{ см}.$$

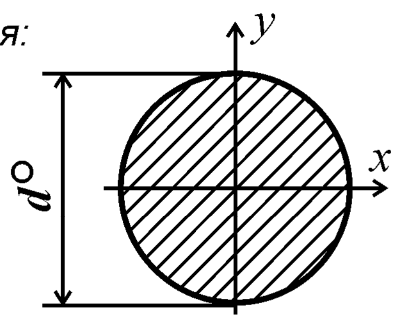
По таблице нормальных линейных размеров

$b^{\square} = 5{,}3$ см;

$h^{\square} = 2b^{\square} = 10{,}6$ см.

Площадь прямоугольного сечения $S^{\square} = b^{\square}h^{\square} = 56{,}2$ см^2.

5. *Вычислим размеры и площадь круглого сечения:*



$$\boldsymbol{W_x^{\circ}} = \frac{\pi(\boldsymbol{d^{\circ}})^3}{32} \geq 87{,}7 \text{ см}^3;$$

$$d^{\circ} \geq \sqrt[3]{\frac{32\cdot 87{,}7\text{см}^3}{\pi}} = 9{,}63 \text{ см}.$$

По таблице нормальных линейных размеров $d^{\circ} = 10$ см.

Площадь круглого сечения $S^{\circ} = \dfrac{\pi {d^{\circ}}^2}{4} = 78{,}5$ см^2.

6. Максимальные касательные напряжения действуют в поперечном сечении с максимальной поперечной силой

$$\max Q = \frac{3}{4} ql = \frac{3}{4} \cdot 80 \cdot 10^3 \frac{Н}{м} \cdot 0{,}7 м = 42 \cdot 10^3 \ Н.$$

Вычислим максимальные касательные напряжения для каждого типа поперечного сечения.

а) Двутавр

Момент инерции двутавра №16 относительно оси x

$$I_x^{\text{I}} = 873 \ см^4 = 873 \cdot 10^{-8} \ м^4.$$

Статический момент верхней (или нижней) половины двутавра №16 относительно оси x

$$S_x^* = 62{,}3 \ см^3 = 62{,}3 \cdot 10^{-6} \ м^3.$$

$$\max \tau^{\text{I}} = \frac{\max Q \cdot S_x^*}{I_x^{\text{I}} \cdot d^{\text{I}}} = \frac{42 \cdot 10^3 Н \cdot 62{,}3 \cdot 10^{-6} м^3}{873 \cdot 10^{-8} м^4 \cdot 5 \cdot 10^{-3} м} = 60 \cdot 10^6 \ \frac{Н}{м^2} = \underline{60 \ МПа}.$$

б) Прямоугольное поперечное сечение

$$\max \tau^{\square} = \frac{3}{2} \frac{\max Q}{S^{\square}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{42 \cdot 10^3 Н}{56{,}2 \cdot 10^{-4} м^2} = 12{,}6 \cdot 10^6 \ \frac{Н}{м^2} = \underline{11{,}2 \ МПа}.$$

в) Круглое поперечное сечение

$$\max \tau^{\circ} = \frac{4}{3} \frac{\max Q}{S^{\circ}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{42 \cdot 10^3 Н}{78{,}5 \cdot 10^{-4} м^2} = 7{,}13 \cdot 10^6 \ \frac{Н}{м^2} = \underline{7{,}13 \ МПа}.$$

7. Найдем соотношение весов трех типов балок.

При равной длине и плотности материала веса балок соотносятся как площади поперечных сечений

$$G^{\text{I}} : G^{\square} : G^{\circ} = S^{\text{I}} : S^{\square} : S^{\circ} = 20{,}2 : 56{,}2 : 78{,}5 = \underline{1 : 2{,}78 : 3{,}89}.$$

Изобразим распределение нормальных и касательных напряжений