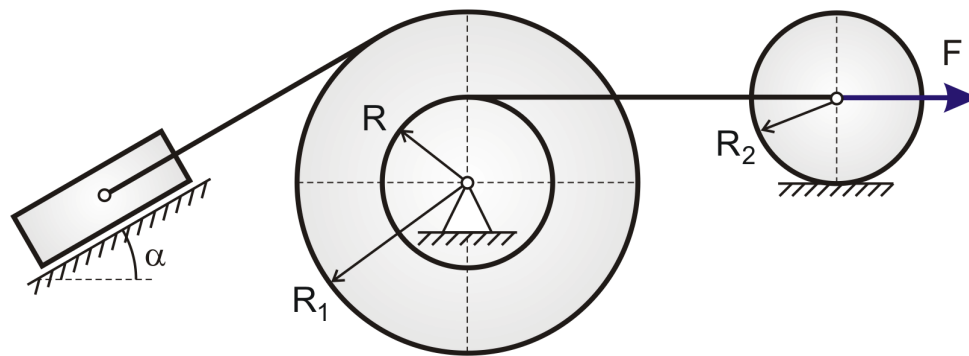


ЗАДАЧА №5

Механическая система приходит в движение из состояния покоя под действием сил тяжести, а также заданной силы F . Начальное положение системы изображено на схеме. В задаче требуется, применив теорему об изменении кинетической энергии, определить зависимость скорости ползуна от его перемещения, а также ускорение ползуна.

Заданная схема



В задаче необходимо учесть трение скольжения ползуна и сопротивление качению катка, движущегося по плоскости без проскальзывания. Коэффициент трения скольжения равен $f = 0,25$; коэффициент трения качения составляет $k = 5 \cdot 10^{-5}$ м; $R = 0,1$ м; $m = 10$ кг.

Таблица исходных данных

вариант	R_1/R	R_2/R	m_1/m	m_2/m	m_3/m	F	α	№ схемы
№9	2	1	1	4	1	$5mg$	30°	IX

Решение.

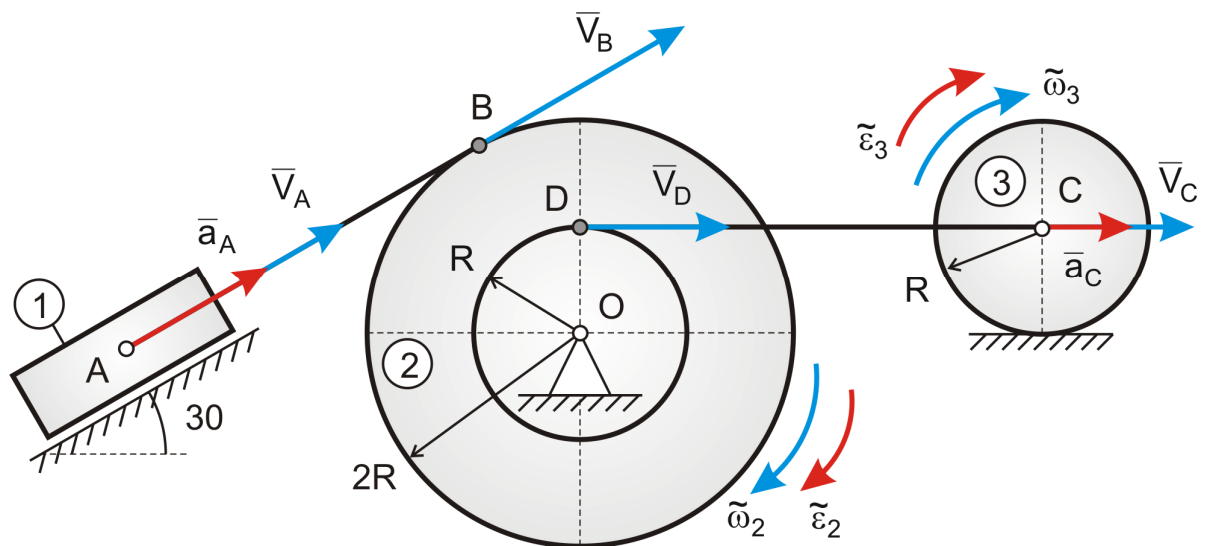
1. Вид движения звеньев

звено №1 (ползун) – поступательное движение;

звено №2 (блок) – вращательное движение вокруг точки O;

звено №3 (каток) – плоское движение.

2. Зависимости скоростей опорных точек и звеньев от скорости (ускорения) ползуна



Пусть скорость ползуна равна $V_A = V$, тогда:

$$V_B = V_A = V, \omega_2 = \frac{V_B}{R_2} = \frac{V}{2R}, V_D = \frac{V_B}{2} = \frac{V}{2}, V_C = V_D = \frac{V}{2}, \omega_3 = \frac{V_C}{R_3} = \frac{V}{2R}$$

3. Моменты инерции блока и катка

Момент инерции блока относительно центра вращения:

$$I_{O2} = \frac{m_2 R_2^2}{2} = \frac{4m (2R)^2}{2} = 8 m R^2$$

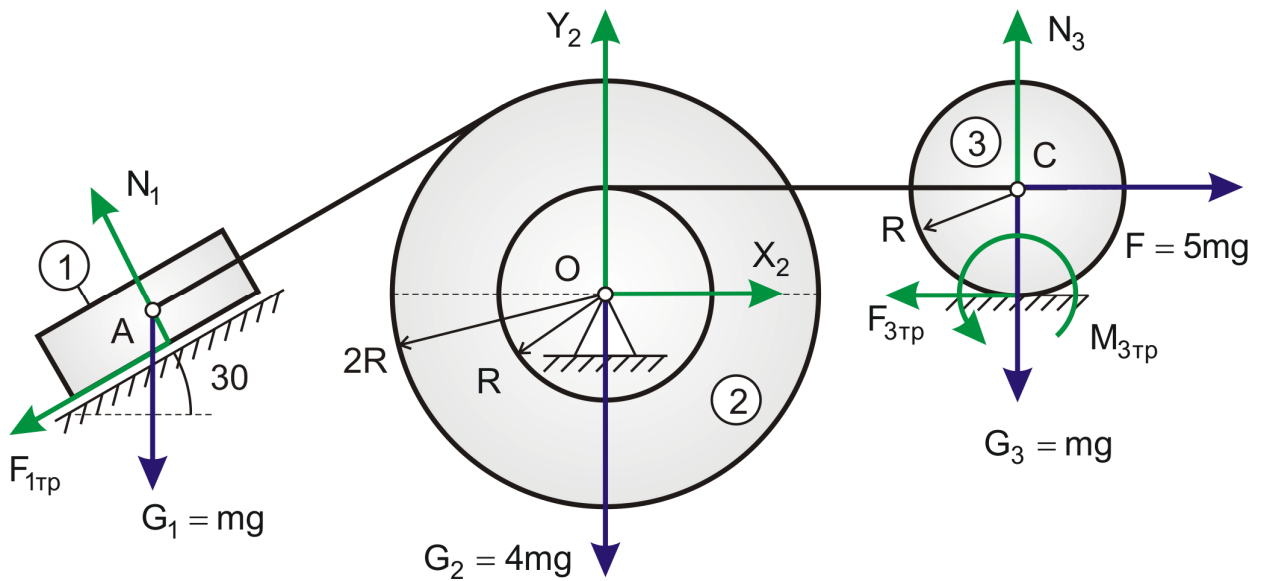
Момент инерции катка относительно центра тяжести:

$$I_{C3} = \frac{m_3 R_3^2}{2} = \frac{m R^2}{2}$$

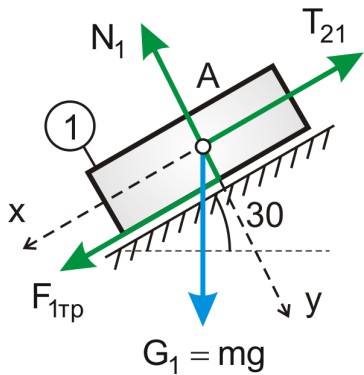
4. Внешние силы, действующие на механизм:

активные: $F = 5mg$, $G_1 = mg$, $G_2 = 4mg$, $G_3 = mg$

реакции опор: $N_1, N_3, X_2, Y_2, F_{1тр}, F_{3тр}, M_{3тр}$



5. Расчет силы трения $F_{1тр}$



Сила трения скольжения равна:

$$F_{1тр} = f N_1$$

Для нахождения реакции шероховатой поверхности N_1 запишем дифференциальное уравнение движения ползуна:

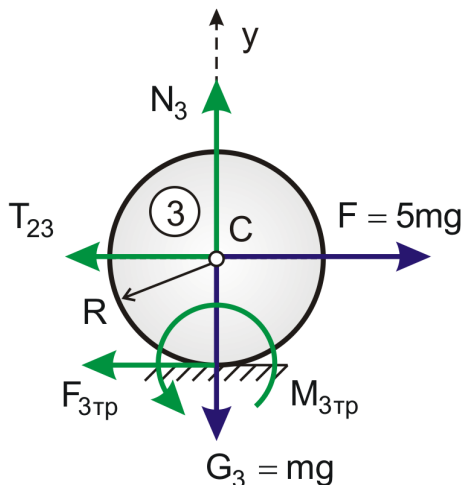
$$m_1 \ddot{r}_A = \bar{F}_{1тр} + \bar{G}_1 + \bar{N}_1 + \bar{T}_{21}$$

По условию задачи ползун не перемещается вдоль оси y , следовательно:

$$m_1 \ddot{y}_A = 0 \Leftrightarrow G_1 \cos 30 - N_1 = 0 \Rightarrow N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} mg$$

В результате сила трения равна: $F_{1тр} = \frac{\sqrt{3}}{2} f mg = \frac{\sqrt{3}}{8} mg$

6. Расчет момента трения $M_{3тр}$



Момент трения качения равен: $M_{3тр} = k N_3$

Для нахождения реакции N_3 запишем проекцию дифференциального уравнения движения катка на ось y :

$$m_3 \ddot{r}_C = \bar{G}_3 + \bar{F} + \bar{N}_3 + \bar{T}_{23} + \bar{F}_{3тр}$$

По условию задачи каток вдоль оси y не перемещается $\Rightarrow m_3 \ddot{y}_C = 0 \Rightarrow N_3 = mg$

В результате момент трения равен: $M_{3\text{тр}} = kmg = 5 \cdot 10^{-4} R mg$

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

7. Расчет кинетической энергии механизма

Кинетическая энергия ползуна: $T_1 = \frac{m_1 V_A^2}{2} = \frac{mV^2}{2}$

Кинетическая энергия блока: $T_2 = \frac{I_{O_2} \omega_2^2}{2} = \frac{8 mR^2}{2} \frac{V^2}{(2R)^2} = mV^2$

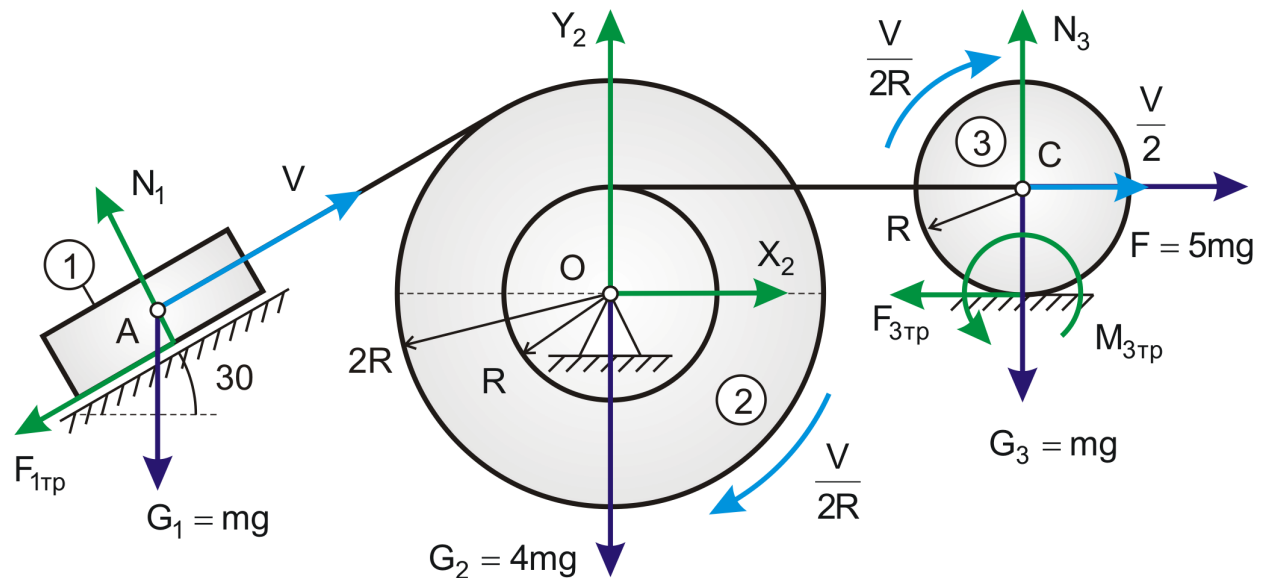
Кинетическая энергия катка:

$$T_3 = \frac{m_3 V_C^2}{2} + \frac{I_{C_3} \omega_3^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{mV^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \frac{V^2}{(2R)^2} = \frac{3mV^2}{16}$$

Кинетическая энергия всего механизма:

$$T(V) = \sum_{i=1}^3 T_i(V) = \frac{mV^2}{2} + mV^2 + \frac{3mV^2}{16} = \frac{27 mV^2}{16}$$

8. Расчет суммарной мощности механизма



$$W_{G_1} = \bar{G}_1 \cdot \bar{V}_A = mg V \cos 120 = -\frac{mgV}{2}$$

$$W_F = \bar{F} \cdot \bar{V}_C = 5mg \frac{V}{2} \cos 0 = \frac{5}{2} mgV;$$

$$W_{F_{1\text{тр}}} = \bar{F}_{1\text{тр}} \cdot \bar{V}_A = F_{1\text{тр}} V \cos 180 = -\frac{\sqrt{3}}{8} mgV;$$

$$W_{M_{3\text{тр}}} = \bar{M}_{3\text{тр}} \cdot \bar{\omega}_3 = M_{3\text{тр}} \omega_3 \cos 180 = -\frac{k mgV}{2R} = -\frac{5}{2} \cdot 10^{-4} mgV;$$

$$W_{G_2} = W_{X_2} = W_{Y_2} = 0;$$

$$W_{N_1} = \bar{N}_1 \cdot \bar{V}_A = 0; W_{G_3} = 0; W_{N_3} = 0;$$

Суммарная мощность механизма в зависимости от скорости движения ползуна:

$$\sum W(V) = \frac{5}{2} mgV - \frac{1}{2} mgV - \frac{\sqrt{3}}{8} mgV - \frac{5}{2} \cdot 10^{-4} mgV = 1,78mgV$$

9. Суммарная работа внешних сил, приложенных к механизму, в зависимости от перемещения ползуна S :

$$\sum A(S) = \int_0^t W dt = 1,78mg \int_0^t V dt = 1,78mgS$$

10. Зависимость скорости ползуна от перемещения

Применим теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

$$T(V) - T_0(V) = \sum A(S) \Leftrightarrow \frac{27}{16} mV^2 - 0 = 1,78mgS$$

$$V^2 = \frac{16}{27} \cdot 1,78 \cdot 10 \cdot S \Rightarrow V = 3,25\sqrt{S}$$

11. Нахождение ускорения ползуна:

$$a = \frac{dV}{dt} = 3,25 \frac{d}{dt} \sqrt{S} = 3,25 \frac{1}{2\sqrt{S}} V = 3,25 \frac{1}{2\sqrt{S}} 3,25\sqrt{S} = 5,28 \text{ м/с}$$