7. НЕКОТОРЫЕ КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

7.1. Задача о всестороннем равномерном давлении на тело

Одна из простейших задач теории упругости – это задача о теле произвольной формы, нагруженном всесторонним равномерным давлением. Решение этой задачи получается очень легко. Пусть бесконечно малый элемент объема dV нагружен одинаковыми элементарными сжимающими силами p, приложенными по нормали к каждой грани (рис.7.1). Тензор напряжений в этом элементарном объеме является шаровым:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I} .$$

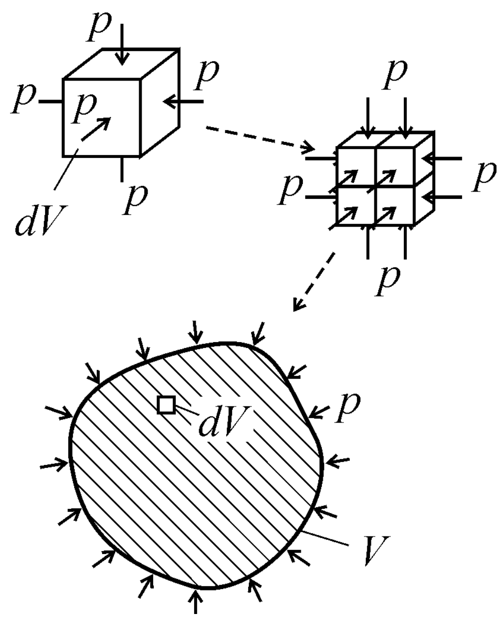


Рис.7.1. Тело, нагруженное равномерным давлением

Используя набор точно так же нагруженных элементарных объемов, как конструктор, можно построить тело произвольной формы, которое окажется нагруженным всесторонним равномерным давлением, причем напряженное состояние в каждом элементарном объеме этого тела известно:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = -p\boldsymbol{I} . \tag{7.1}$$

В результате получили очевидное: ***при всестороннем равномерном давлении в теле возникает однородное шаровое напряженное состояние***.

Тензор деформаций легко получается из закона Гука в девиаторах:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{3K_0}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = -\frac{p}{3K_0}\boldsymbol{I} , \tag{7.2}$$

а вектор смещений можно угадать с использованием уравнения Коши:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \boldsymbol{u})_{\mathrm{S}} .$$

Градиент поля смещений, вызванных деформацией тела, должен представлять собой единичный тензор, умноженный на константу. Следовательно, нетрудно догадаться, что поле смещений должно иметь следующий вид:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = -\frac{p}{3K_0}\boldsymbol{x}. \tag{7.3}$$

Отметим, что в выражении (7.3) неучтены смещения тела, как жесткого целого.

7.2. Задача о сферической полости в неограниченном теле

Рассмотрим функцию:

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{\lambda}{x},$$

λ – скаляр, $x = |\boldsymbol{x}|$, $\boldsymbol{x}$ – радиус-вектор точки пространства. Покажем, что эта функция является гармонической:

$$\nabla\Phi = \lambda\nabla x^{-1} = -\lambda x^{-2}\frac{\boldsymbol{x}}{x} = -\lambda\frac{\boldsymbol{x}}{x^3};$$

$$\nabla\nabla\Phi = -\lambda\nabla(\frac{\boldsymbol{x}}{x^3}) = -\lambda((\nabla x^{-3})\boldsymbol{x} + x^{-3}(\underbrace{\nabla\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{I}})) =$$

$$= -\lambda((-3x^{-4}\frac{\boldsymbol{x}}{x})\boldsymbol{x} + x^{-3}\boldsymbol{I}) = \lambda(\frac{3\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}{x^5} - \frac{1}{x^3}\boldsymbol{I});$$

$$\Delta\Phi = \nabla\cdot\nabla\Phi = \lambda(\frac{3\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}{x^5} - \frac{1}{x^3}\boldsymbol{I}_\circ) = \lambda(\frac{3}{x^3} - \frac{3}{x^3}) = 0.$$

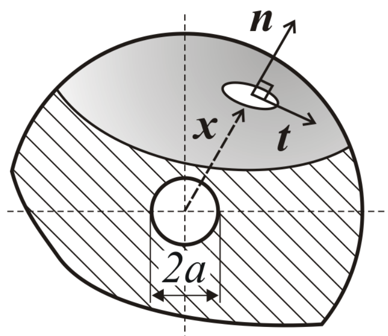
Функция Φ обладает сферической симметрией, так как в выражение λx^{-1} не входит ни один вектор. Поверхности уровня этой функции представляют собой концентрические сферы с центром в точке $\boldsymbol{x} = 0$ (это особая точка, так как значение функции в ней равно ∞).

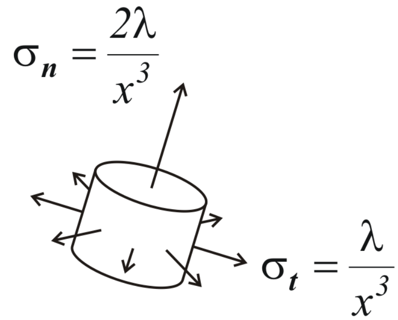
Ввиду своей гармоничности, функция Φ может рассматриваться, как функция напряжений в упругом теле при отсутствии объемных сил ($\boldsymbol{F}_V = 0$):

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \nabla\nabla\Phi(\boldsymbol{x}) = \lambda(\frac{3\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}{x^5} - \frac{\boldsymbol{I}}{x^3}).$$

При этом тензоры напряжений и деформаций представляют собой девиаторы, а при аргументе $\boldsymbol{x} = 0$ функция не существует.

Найденное решение подходит задаче о неограниченном теле со сферической полостью радиуса a. Определим напряженно-деформированное состояние в этом теле и граничные условия. Для этого рассмотрим внутри этого тела сферу (радиусом $x > a$), центр которой совпадает с центром полости, вырезанной из тела.





Вектор напряжений на площадке $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{x}}{x}$:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n} = \lambda\left(\frac{3\boldsymbol{xx}}{x^5} - \frac{\boldsymbol{I}}{x^3}\right) \cdot \boldsymbol{n} = \lambda\left(\frac{3\boldsymbol{xx}}{x^5} - \frac{\boldsymbol{I}}{x^3}\right) \cdot \frac{\boldsymbol{x}}{x} =$$

$$= \lambda\left(\frac{3\boldsymbol{xx} \cdot \boldsymbol{x}}{x^6} - \frac{\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{x}}{x^4}\right) = \lambda\left(\frac{3\boldsymbol{x}}{x^4} - \frac{\boldsymbol{x}}{x^4}\right) = 2\lambda \frac{\boldsymbol{x}}{x^4} = \frac{2\lambda}{x^3}\boldsymbol{n}.$$

Величина нормального напряжения на площадке $\boldsymbol{n}$: $\quad \sigma_{\boldsymbol{n}} = \dfrac{2\lambda}{x^3}$.

Из сферической симметрии следует, что главной осью напряженно-деформированного состояния в точке $\boldsymbol{x}$, кроме вектора $\boldsymbol{n}$ является любой вектор, ему ортогональный.

Напряжения на площадке с единичной нормалью $\boldsymbol{t}$, ортогональной вектору $\boldsymbol{n}$:

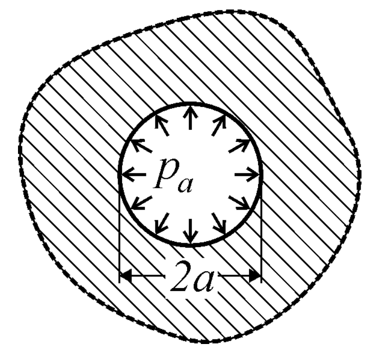
$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{t} = \lambda\left(\frac{3\boldsymbol{xx}}{x^5} - \frac{\boldsymbol{I}}{x^3}\right) \cdot \boldsymbol{t} = \lambda\left(\frac{3\boldsymbol{x}}{x^5} \underbrace{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{t}}_{0} - \frac{\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{t}}{x^3}\right) = -\frac{\lambda}{x^3}\boldsymbol{t}.$$

Величина нормального напряжения на площадках $\boldsymbol{t}$: $\quad \sigma_{\boldsymbol{t}} = \dfrac{\lambda}{x^3}$.

Поле деформаций: $\quad \boldsymbol{\varepsilon} = \dfrac{1}{2G}\boldsymbol{\sigma} = \dfrac{\lambda}{2G}\left(\dfrac{3\boldsymbol{xx}}{x^5} - \dfrac{1}{x^3}\boldsymbol{I}\right) = \dfrac{\lambda}{2G} * \dfrac{3\boldsymbol{nn}\text{-}\boldsymbol{I}}{x^3}$.

Поле перемещений: $\boldsymbol{u} = \dfrac{\nabla \Phi}{2G} = -\dfrac{1}{2G} * \dfrac{\lambda \boldsymbol{x}}{x^3} = -\dfrac{\lambda}{2Gx^2}\boldsymbol{n}$.

Найденное напряженно-деформированное состояние может возникнуть в рассматриваемой задаче только в том случае, если на поверхности полости приложено давление p_a. Зная величину этого давления, модно определить константу λ:



$$\sigma_{\boldsymbol{n}} = \frac{2\lambda}{a^3} = -p_a \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{p_a a^3}{2}.$$

С учетом найденной константы λ решение задачи о сферической полости в неограниченном теле приоретает следующий вид:

поле напряжений $$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \frac{p_a a^3}{2} * \frac{\boldsymbol{I} - 3\boldsymbol{nn}}{x^3};$$

радиальные напряжения $$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = -\frac{p_a a^3}{x^3}\boldsymbol{n};$$

окружные напряжения $$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) = \frac{p_a a^3}{2x^3}\boldsymbol{t};$$

поле деформаций $$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \frac{p_a a^3}{4G} * \frac{\boldsymbol{I} - 3\boldsymbol{nn}}{x^3};$$

поле смещений $$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \frac{p_a a^3}{4G} * \frac{\boldsymbol{n}}{x^2} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{0}).$$

7.3. Задача о сфере, нагруженной внешним и внутренним давлением

Рассмотрим сферу радиуса b с полостью радиуса a, нагруженную давлением, которое на внутреннем радиусе равно

$$p_a = -\frac{2\lambda}{a^3},$$

а на внешнем

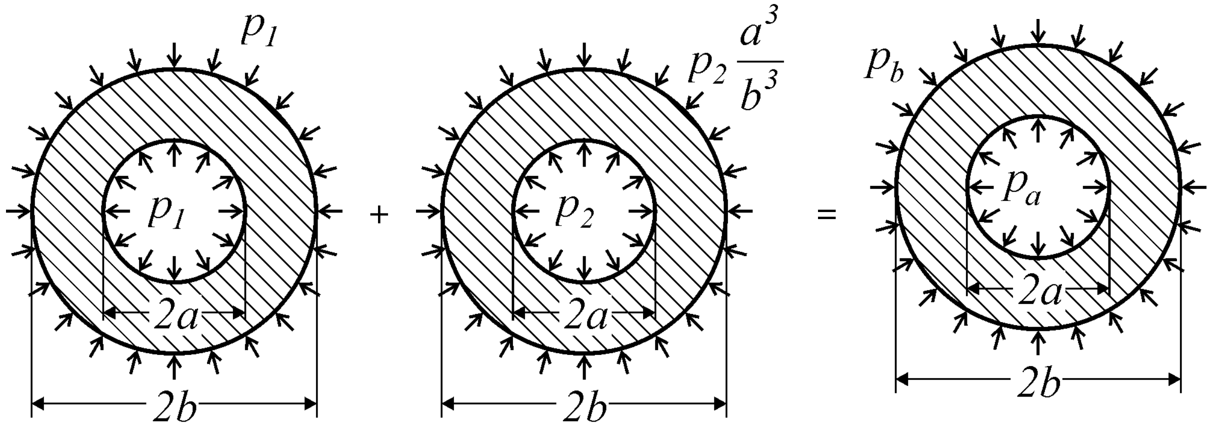
$$p_b = -\frac{2\lambda}{b^3},$$

то есть эти давления соотносятся обратно пропорционально кубам радиусов:

$$\frac{p_a}{p_b} = \frac{b^3}{a^3}.$$

В этом случае в сфере возникает такое же напряженное состояние, как и в бесконечном теле со сферической полостью, если на поверхности этой полости приложено давление p_a.

Если давления p_a и p_b соотносятся не обратно пропорционально кубам радиусов, то решение может быть получено методом суперпозиции, путем добавления решения задачи о всестороннем равномерном давлении на тело произвольной формы (пункт 7.1) к решению, полученному в пункте 7.2.



задача о сфере, нагруженной равномерным давлением

задача о сферическом включении

задача о сфере, нагруженной внутренним и внешним давлением

В этом случае поля напряжений, деформаций и смещений имеют вид:

поле напряжений
$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 * \frac{3\boldsymbol{nn} - \boldsymbol{I}}{x^3} + \lambda_2 \boldsymbol{I};$$

поле деформаций
$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \frac{\lambda_1}{2G} * \frac{3\boldsymbol{nn} - \boldsymbol{I}}{x^3} + \frac{\lambda_2}{3K_0}\boldsymbol{I};$$

поле смещений
$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\lambda_1}{2Gx^2}\boldsymbol{n} + \frac{\lambda_2}{3K_0}\boldsymbol{x}.$$

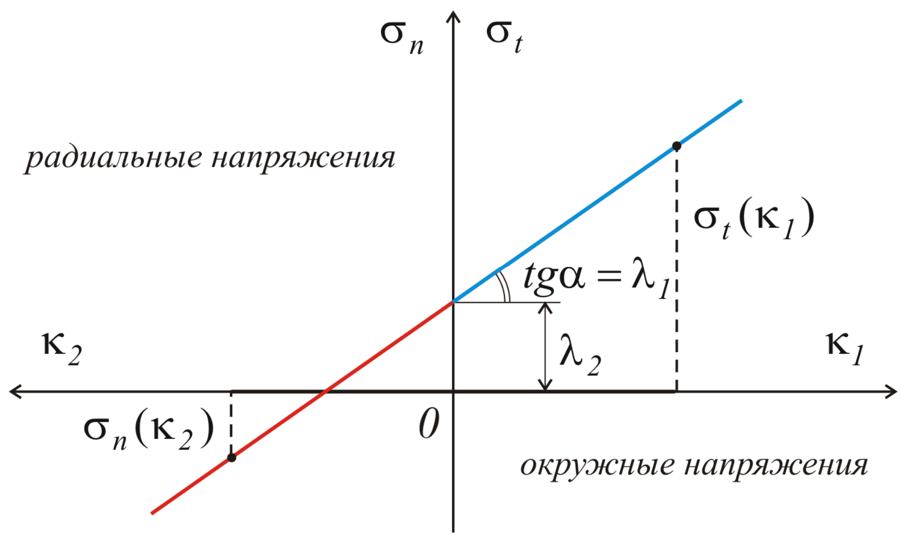
радиальные напряжения
$$\boldsymbol{\sigma_n} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n} = \left(\frac{2}{x^3}\lambda_1 + \lambda_2\right)\boldsymbol{n};$$

окружные напряжения
$$\boldsymbol{\sigma_t} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{t} = \left(-\frac{1}{x^3}\lambda_1 + \lambda_2\right)\boldsymbol{t};$$

При известных величинах внешнего и внутреннего давления можно найти константы λ_1 и λ_2:

$$\begin{cases} \sigma_{\boldsymbol{n}}(a) = -p_a \\ \sigma_{\boldsymbol{n}}(b) = -p_b \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{a^3 b^3}{2(b^3 - a^3)}(p_b - p_a) \\ \lambda_2 = \dfrac{p_b b^3 - p_a a^3}{a^3 - b^3} \end{cases}$$

Графическая интерпретация решения



Величины радиальных и окружных напряжений в зависимости от условных координат $\kappa_1 = \dfrac{1}{x^3}$ и $\kappa_2 = \dfrac{2}{x^3}$ представляют собой линейные функции.

Радиальные напряжения по величине равны:

$$\sigma_n(\kappa_2) = \kappa_2 \lambda_1 + \lambda_2 .$$

Окружные напряжения по величине равны:

$$\sigma_t(\kappa_1) = -\kappa_1 \lambda_1 + \lambda_2 .$$

7.4. Задача о цилиндрическом включении

Рассмотрим скалярную функцию

$$\psi = \lambda * ln\rho ,$$

где λ – константа, $\rho = \boldsymbol{x} \cdot \tilde{\boldsymbol{I}}$, $\tilde{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{kk}$ – проецирующий тензор. Покажем, что рассматриваемая функция гармонична. Градиент этой функции равен

$$\nabla\psi = \frac{\lambda}{\rho} \nabla\rho ,$$

$$\nabla\rho=\nabla\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}=\frac{2\nabla\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}{2\sqrt{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}}=\nabla\boldsymbol{\rho}\cdot\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho},$$

$$\nabla\boldsymbol{\rho}=\nabla(\boldsymbol{x}\cdot\tilde{\boldsymbol{I}})=\underbrace{\nabla\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{I}}\cdot\tilde{\boldsymbol{I}}=\tilde{\boldsymbol{I}}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{kk}\,.$$

Подставим полученное выражение в предыдущее:

$$\nabla\rho=\nabla\boldsymbol{\rho}\cdot\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}=\frac{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{kk})\cdot\boldsymbol{\rho}}{\rho}=\frac{1}{\rho}(\underbrace{\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{\rho}}-\boldsymbol{k}\underbrace{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\rho}}_{0})=\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}=\boldsymbol{m}\,.$$

Следовательно,

$$\nabla\psi=\frac{\lambda}{\rho}\boldsymbol{m}\,,$$

$$\nabla\nabla\psi=\nabla(\lambda\frac{\boldsymbol{m}}{\rho})=\frac{\lambda}{\rho}\nabla\boldsymbol{m}+\lambda\boldsymbol{m}\nabla(\frac{1}{\rho}).$$

В этом выражении

$$\nabla(\frac{1}{\rho})=-\frac{\boldsymbol{m}}{\rho^2},$$

$$\nabla\boldsymbol{m}=\nabla\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}=\frac{1}{\rho}\nabla\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{\rho}\nabla\rho^{-1}=\frac{\tilde{\boldsymbol{I}}}{\rho}-\frac{\boldsymbol{mm}}{\rho}=\frac{\boldsymbol{I}-\boldsymbol{kk}-\boldsymbol{mm}}{\rho}\,.$$

Таким образом, получили:

$$\nabla\nabla\psi=\frac{\lambda}{\rho^2}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{kk}-\boldsymbol{mm})-\lambda\frac{\boldsymbol{mm}}{\rho^2}=\frac{\lambda}{\rho^2}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{kk}-2\boldsymbol{mm}).$$

Скалярная свертка этого выражения равна нулю:

$$\Delta\psi=\nabla\cdot\nabla\psi=\frac{\lambda}{\rho^2}(3-1-2)=0,$$

следовательно, функция ψ является гармонической.

Итак, в цилиндрической системе координат рассмотрим следующее поле напряжений:

$$\boldsymbol{\sigma}(\rho)=\frac{\lambda}{\rho^2}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{kk}-2\boldsymbol{mm}).$$

В этом случае $$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \rho} \neq 0.$$

Определим, какой задаче соответствует рассматриваемое поле напряжений. Отметим, что в любой точке (кроме точек $\rho = 0$ – это особые точки) тензор напряжений является девиатором, а значит, по закону Гука,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\rho) = \frac{\boldsymbol{\sigma}(\rho)}{2G}$$ – тензор деформаций.

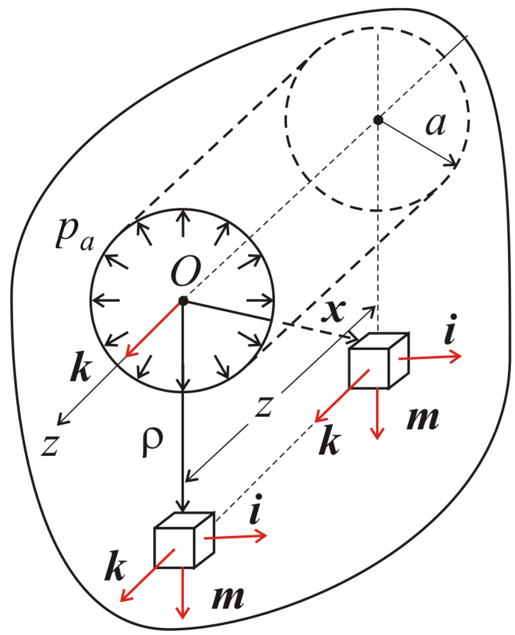
В неограниченном теле вдоль оси z высверлим канал радиусом a (чтобы убрать особые точки);

$\boldsymbol{k}$ – единичный вектор вдоль оси z;

$\boldsymbol{m}$ – орт вектора $\boldsymbol{\rho}$, то есть $\boldsymbol{m} = \dfrac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}$;

вектор $\boldsymbol{m}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{k}$;

$\boldsymbol{i}$ – единичный вектор, ортогональный векторам $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{m}$.



Для произвольной точки с радиус-вектором $\boldsymbol{x}$ напряженное состояние будет следующим:

осевые напряжения $$\boldsymbol{\sigma}_k = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{k} = \frac{\lambda}{\rho^2}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{kk} - 2\boldsymbol{mm}) \cdot \boldsymbol{k} = 0;$$

радиальные напряжения

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{m} = \frac{\lambda}{\rho^2}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{kk} - 2\boldsymbol{mm}) \cdot \boldsymbol{m} = -\frac{\lambda}{\rho^2}\boldsymbol{m};$$

окружные напряжения $$\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{i} = \frac{\lambda}{\rho^2}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{kk} - 2\boldsymbol{mm}) \cdot \boldsymbol{i} = \frac{\lambda}{\rho^2}\boldsymbol{i}.$$

Напряженное состояние не зависит от координаты z, и напряжения вдоль оси цилиндра не меняются.

Если на внутренней поверхности высверленного отверстия с радиусом a известно давление p_a, то можно найти множитель λ:

$$-\frac{\lambda}{a^2} = -p_a \quad \Rightarrow \quad \lambda = p_a a^2.$$

На произвольном радиусе $b > a$ радиальные напряжения меньше p_a:

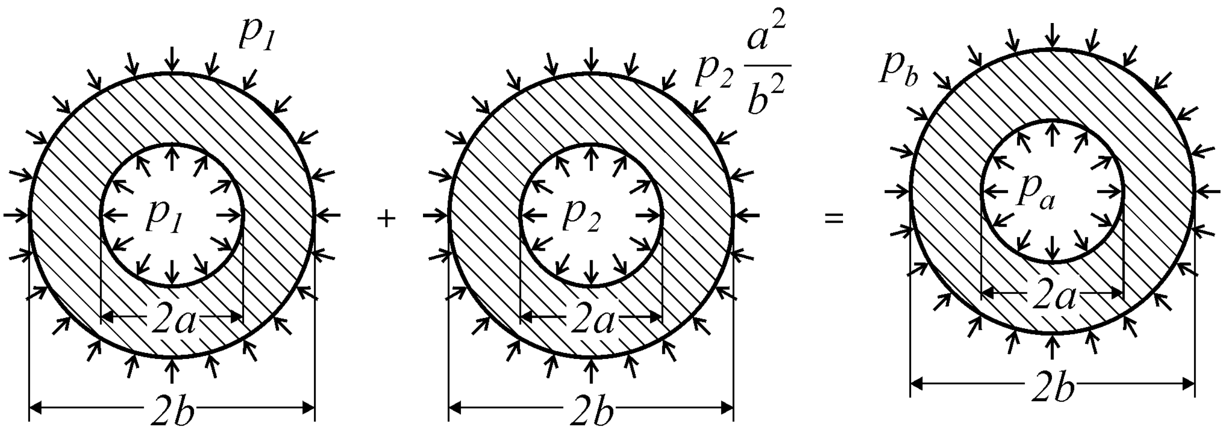
$$p_b = p_a \frac{a^2}{b^2}.$$

Подходящая к рассмотренному решению задача – бесконечная труба с внутренним и наружным давлением, если эти давления соотносятся обратно пропорционально квадратам радиусов:

$$\frac{p_b}{p_a} = \frac{a^2}{b^2}.$$

7.5. Задача Ламе о трубе, нагруженной внутренним и внешним давлением

Решение задачи о трубе, нагруженной внутренним p_a и внешним p_b давлением, можно получить методом суперпозиции, путем сложения решений следующих задач:



задача о трубе, нагруженной равномерным давлением по боковой поверхности — *задача о цилиндрическом включении* — *задача о трубе, нагруженной внутренним и внешним давлением*

В этом случае поля напряжений, деформаций и смещений имеют вид:

поле напряжений: $$\boldsymbol{\sigma}(\rho) = \frac{\lambda_1}{\rho^2}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{kk} - 2\boldsymbol{mm}) + \lambda_2(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{kk});$$

векторы радиальных и окружных напряжений соответственно:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{m}}(\rho) = (\lambda_2 - \frac{\lambda_1}{\rho^2})\boldsymbol{m}\,; \qquad \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{i}}(\rho) = (\lambda_2 + \frac{\lambda_1}{\rho^2})\boldsymbol{i}\,;$$

величины этих напряжений:

$$\sigma_{\boldsymbol{m}}(\rho) = -\frac{1}{\rho^2}\lambda_1 + \lambda_2; \qquad \sigma_{\boldsymbol{i}}(\rho) = \frac{1}{\rho^2}\lambda_1 + \lambda_2;$$

поле деформаций:

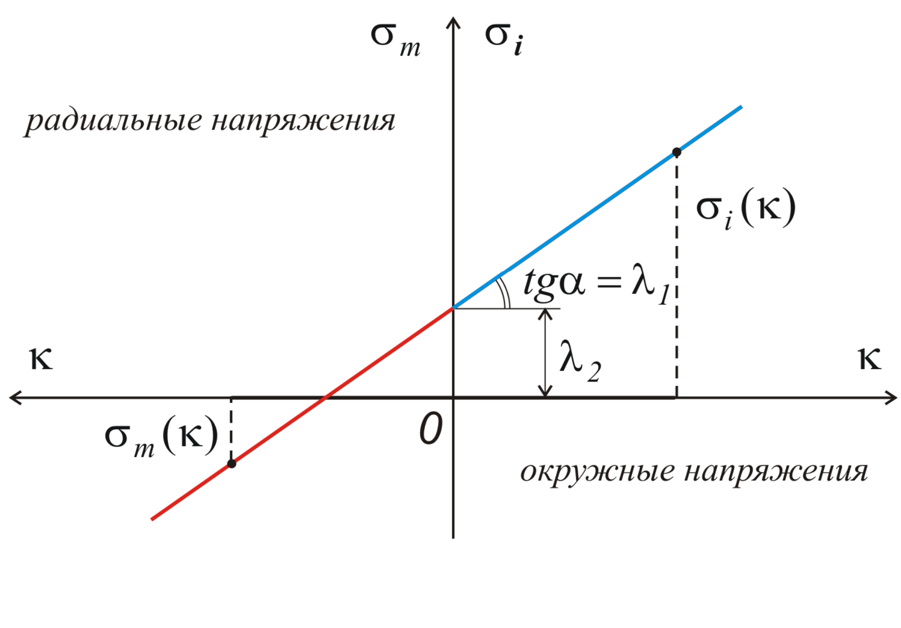
$$\boldsymbol{\varepsilon}(\rho) = \frac{1}{2G}\left[\frac{\lambda_1}{\rho^2}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{kk} - 2\boldsymbol{mm}) + \lambda_2(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{kk})\right] + \frac{2\lambda_2 \boldsymbol{I}}{3K_0};$$

поле смещений: $$\boldsymbol{u}(\rho) = -\frac{\lambda_1}{2G\rho^2}\boldsymbol{m} + \frac{\lambda_2}{3K_0}\boldsymbol{\rho}.$$

При известных величинах внешнего и внутреннего давления можно найти константы λ_1 и λ_2:

$$\begin{cases} \sigma_m(a) = -p_a \\ \sigma_m(b) = -p_b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{p_b - p_a}{a^2 - b^2}a^2 b^2 \\ \lambda_2 = \dfrac{p_b - p_a}{a^2 - b^2}b^2 - p_a \end{cases}$$

Графическая интерпретация решения



Величины радиальных и окружных напряжений в зависимости от условной координаты $\kappa = \dfrac{1}{\rho^2}$ представляют собой линейные функции.

радиальные напряжения равны: $\sigma_m(\kappa) = -\kappa\lambda_1 + \lambda_2$

окружные напряжения равны: $\sigma_i(\kappa) = \kappa\lambda_1 + \lambda_2$

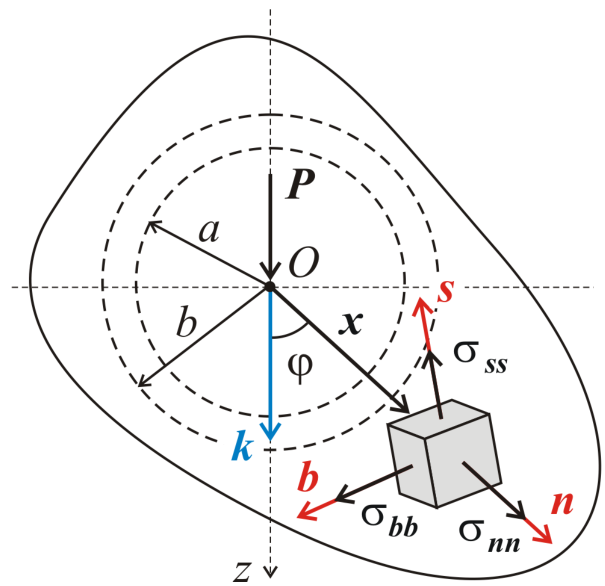
7.6. Сосредоточенная сила в неограниченном теле (задача Кельвина)

$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{k}P$ – сосредоточенная сила, приложенная в начале координат вдоль оси z, определяемой единичным вектором $\boldsymbol{k}$;

$\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{n}$ – взаимно ортогональные единичные векторы, определяющие площадки элементарного объема;

$\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{x}}{x}$ – орт радиус-вектора;

$\theta = \dfrac{z}{x} = cos\varphi = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}$.



Тело – неограниченная однородная изотропная среда со всеми видами симметрии; нагрузка симметрична относительно оси z и кососимметрична относительно плоскости $z = 0$.

Из свойств симметрии следует, что в решение могут входить лишь вектор $\boldsymbol{k}$, определяющий ось z и радиус-вектор $\boldsymbol{x}$ рассматриваемого элементарного объема.

Задача подобна относительно начала координат. Если выделить сферы радиусами a и b, то напряжения на поверхности этих сфер должны уравновешивать одну и туже силу $\boldsymbol{P}$. При одинаковых величинах θ они должны быть обратно пропорциональны квадрату радиуса.

Примем функцию напряжений в виде:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\psi_\sigma}(\theta)\frac{P}{x^2},$$

где $\boldsymbol{\psi_\sigma}(\theta)$ – двухвалентное тензорное поле, зависящее только от угла θ.

Для деформаций аналогично:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\theta)\frac{P}{Ex^2},$$

где $\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\theta)$ – двухвалентное потенциальное поле, зависящее только от угла θ.

Для смещений коэффициент пропорциональности является другим:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}(\theta)\frac{P}{Ex},$$

где $\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}(\theta)$ – векторное поле.

Для решения задачи нужно найти любую из этих трех функций: $\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\sigma}}(\theta)$, $\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\theta)$ или $\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}(\theta)$. Проще искать векторную функцию $\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}(\theta)$.

Используем уравнение равновесия теории упругости в форме Ламе, упростив его с учетом отсутствия объемных сил:

$$\Delta\boldsymbol{u} + \frac{1}{(1-2\mu)}\nabla\cdot\boldsymbol{u}\nabla = \boldsymbol{0}. \qquad (*)$$

Поскольку в решение могут входить только два вектора: $\boldsymbol{x}$ (или его орт $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{x}}{x}$) и $\boldsymbol{k}$, то функция $\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}(\theta)$ должна иметь следующий вид:

$$\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}(\theta) = \alpha^*(\theta)\,\boldsymbol{n} + \beta^*(\theta)\,\boldsymbol{k},$$

а для смещений получим

$$\boldsymbol{u}(\theta) = \alpha(\theta)\frac{\boldsymbol{n}}{x} + \beta(\theta)\frac{\boldsymbol{k}}{x}.$$

Косая симметрия задачи относительно плоскости $z = 0$ требует, чтобы функции $\alpha(\theta)$ и $\beta(\theta)$ обладали следующей четностью:

$\alpha(\theta)$ – нечетная, $\beta(\theta)$ – четная.

Подставим выражение для смещений в уравнение (*) и после дифференцирования и преобразований получим:

$$-\frac{2\alpha\boldsymbol{n}}{x^3} + \frac{2\alpha'}{x^3}(\boldsymbol{k}-\theta\boldsymbol{n}) + \frac{\alpha''}{x^3}(1-\theta^2)\boldsymbol{n} - \frac{2\theta\alpha'}{x^3}\boldsymbol{n} + \frac{\beta''(1-\theta^2)}{x^3}\boldsymbol{k} -$$

$$-\frac{2\theta\beta'}{x^3}\boldsymbol{k} + \frac{1}{(1-2\mu)x^3}(-2\alpha\boldsymbol{n} + 2\alpha'(\boldsymbol{k}-\theta\boldsymbol{n}) + \alpha'(\theta\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}) + \beta(3\theta\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}) -$$

$$-2\beta'\theta(\boldsymbol{k}-\theta\boldsymbol{n})+\beta''(1-\theta^2)(\boldsymbol{k}-\theta\boldsymbol{n})+\beta''(3\theta^2\boldsymbol{n}-\theta\mathrm{k}-2\boldsymbol{n}))=0.$$

Для того чтобы это выражение было равно нулю, необходимо, чтобы коэффициенты при каждом из линейно независимых векторов $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{k}$ были равны нулю:

$$-2\alpha-4\alpha'\theta+\alpha''(1-\theta^2)-$$

$$-\frac{1}{1-2\mu}(-2\alpha-\alpha'\theta+3\beta\theta+5\beta'\theta^2-2\beta'+\beta''(\theta'-1)\theta)=0;$$

$$2\alpha'+(1-\theta^2)\beta''-2\theta\beta'+\frac{1}{1-2\mu}(\alpha'-\beta-3\beta'\theta+(1-\theta^2)\beta'')=0.$$

(**)

Простейшие нечетная функция α и четная β, удовлетворяющие этим уравнениям, следующие:

$$\alpha(\theta)=\delta\theta,\qquad \beta=\mathrm{const}.$$

Тогда выражения (**) преобразуются к виду

$$\delta=\frac{\beta}{3-4\mu}\qquad \text{или}\qquad \beta=\delta(3-4\mu).$$

Таким образом, получили выражение для смещений:

$$\boldsymbol{u}(\theta)=\alpha(\theta)\frac{\boldsymbol{n}}{x}+\beta(\theta)\frac{\boldsymbol{k}}{x}=\delta\theta\frac{\boldsymbol{n}}{x}+\beta\frac{\boldsymbol{k}}{x};$$

$$\boldsymbol{u}(\theta)=\frac{\delta}{x}(\theta\boldsymbol{n}+(3-4\mu)\boldsymbol{k}).$$

Подставив полученную функцию смещений в закон Гука, с учетом уравнения Коши можно найти тензор напряжений:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})=\frac{3K_0-2G}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{uI}+2G(\nabla\boldsymbol{u})_S=G(\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\nabla+\frac{2\mu}{1-2\mu}\nabla\cdot\boldsymbol{uI}),$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})=-\frac{2G\delta}{x^2}((1-2\mu)(\boldsymbol{nk}+\boldsymbol{kn}-\theta\boldsymbol{I})+3\theta\boldsymbol{nn}).$$

Тензор деформаций в задаче Кельвина может быть найден из закона Гука:

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_{Ш}+\boldsymbol{\varepsilon}_{Д}=\frac{\boldsymbol{\sigma}_{Ш}}{3K_0}+\frac{\boldsymbol{\sigma}_{Д}}{2G}.$$

Шаровая часть тензора напряжений:

$$\boldsymbol{\sigma}_{Ш} = \boldsymbol{\sigma} \underset{\circ}{\cdot} \boldsymbol{I} = -2G\frac{\delta}{x^2}((1-2\mu)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}-\theta\boldsymbol{I}) \underset{\circ}{\cdot} +3\theta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{I} =$$

$$= \frac{2G\delta(1-2\mu)\theta}{x^2}\boldsymbol{I};$$

девиатор тензора напряжений:

$$\boldsymbol{\sigma}_{Д} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{Ш} =$$

$$= -\frac{2G\delta}{x^2}\left[(1-2\mu)(\boldsymbol{nk}+\boldsymbol{kn}-\theta\boldsymbol{I})+3\theta\boldsymbol{nn}\right] - \frac{2G\delta}{x^2}(1-2\mu)\theta\boldsymbol{I} =$$

$$= -\frac{2G\delta}{x^2}\left[(1-2\mu)(\boldsymbol{nk}+\boldsymbol{kn}-\theta\boldsymbol{I})+3\theta\boldsymbol{nn}+(1-2\mu)\theta\boldsymbol{I}\right] =$$

$$= -\frac{2G\delta}{x^2}\left[(1-2\mu)(\boldsymbol{nk}+\boldsymbol{kn})+3\theta\boldsymbol{nn}\right].$$

Тензор деформаций

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{3K_0}\boldsymbol{\sigma}_{Ш} + \frac{1}{2G}\boldsymbol{\sigma}_{Д} = \frac{1-2\mu}{E}\boldsymbol{\sigma}_{Ш} + \frac{1+\mu}{E}\boldsymbol{\sigma}_{Д} =$$

$$= \frac{\delta(1-2\mu)^2\theta}{x^2(1+\mu)}\boldsymbol{I} - \frac{\delta}{x^2}\left[(1-2\mu)(\boldsymbol{nk}+\boldsymbol{kn})+3\theta\boldsymbol{nn}\right] =$$

$$= \frac{\delta}{x^2}\left(\frac{(1-2\mu)^2\theta}{(1+\mu)}\boldsymbol{I} - \left[(1-2\mu)(\boldsymbol{nk}+\boldsymbol{kn})+3\theta\boldsymbol{nn}\right]\right).$$

Величина δ может быть найдена из условия равновесия: результирующая сил, действующих на поверхность сферы радиусом x (для простоты пусть $x=1$), должна быть равна заданной силе P с обратным знаком. С учетом косой симметрии относительно плоскости $z=0$ получим

$$P = -2\int_0^{\pi/2}\boldsymbol{p_n}\cdot\boldsymbol{k}\ 2\pi\ sin\varphi\ d\varphi = \frac{8\pi(1-\mu)E\delta}{(1+\mu)}.$$

Отсюда

$$\delta = \frac{P(1+\mu)}{8\pi(1-\mu)E}.$$

Таким образом, решение задачи Кельвина имеет следующий вид:

поле напряжений

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = -\frac{P}{8\pi x^2(1-\mu)}((1-2\mu)(\boldsymbol{nk}+\boldsymbol{kn}-\theta\boldsymbol{I})+3\theta\boldsymbol{nn});$$

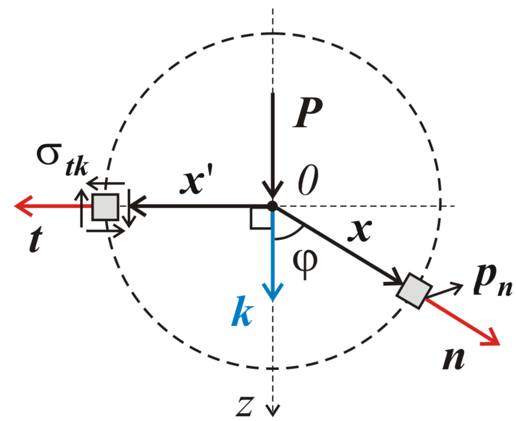
поле деформаций

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \frac{P(1+\mu)}{8\pi x^2(1-\mu)E}\left(\frac{(1-2\mu)^2\theta}{(1+\mu)}\boldsymbol{I} - \left[(1-2\mu)(\boldsymbol{nk}+\boldsymbol{kn})+3\theta\boldsymbol{nn}\right]\right);$$

поле смещений

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \frac{P(1+\mu)}{8\pi x(1-\mu)E}(\theta\boldsymbol{n}+(3-4\mu)\boldsymbol{k}).$$

Задача №1. Найти полные напряжения на поверхности сферы радиуса x.



Решение:

$$\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n} =$$

$$= -\frac{2G\delta}{x^2}((1-2\mu)(\boldsymbol{k}-\theta\boldsymbol{n})+3\theta\boldsymbol{n});$$

Задача №2. Найти напряжения, действующие на плоскости $z=0$.

Решение. Обозначим радиус-вектор на заданной плоскости $\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{x}'$, а его орт $\boldsymbol{x}'/x\equiv\boldsymbol{t}$. Также отметим, что на этой плоскости

$$\varphi = 90° \Rightarrow \theta = \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{k} = 0,$$

тогда полные напряжения на площадке этой плоскости с нормалью $\boldsymbol{k}$ равны:

$$\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{k} = -\frac{(1-2\mu)P}{8\pi x^2(1-\mu)}\boldsymbol{t};$$

нормальных напряжений там нет: $\sigma_{\boldsymbol{kk}} = \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{k} = 0$;

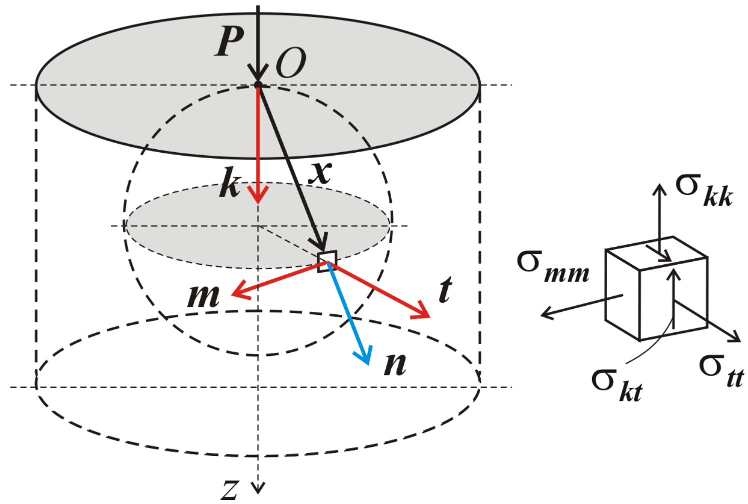
а касательные напряжения равны: $\sigma_{\boldsymbol{tk}} = \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{t} = -\dfrac{(1-2\mu)P}{8\pi x^2(1-\mu)}$.

7.7. Действие сосредоточенной силы на полупространство (задача Буссинеска)

$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{k}P$ – сосредоточенная сила, приложенная в начале координат вдоль оси z, определяемой единичным вектором $\boldsymbol{k}$;

$\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{m}$ – взаимно ортогональные единичные векторы;

$\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{x}}{x}$ – орт радиус-вектора.



В этой задаче соображения симметрии и подобия такие же, что и в задаче Кельвина. Однако краевые условия другие – для рассматриваемой задачи напряжения на плоскости $z = 0$ отсутствуют, а в задаче Кельвина там были касательные напряжения:

$$\sigma_{tk} = -\frac{(1-2\mu)P}{8\pi x^2(1-\mu)}.$$

Поэтому можно попытаться к полученному решению задачи Кельвина подобрать такую добавку, которая на плоскости $z = 0$ дала бы эти же напряжения, но с обратным знаком. Добавочные перемещения, напряжения и деформации будем обозначать соответственно:

$$\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^* \text{ и } \boldsymbol{\varepsilon}^*.$$

Известно, что градиент гармонической функции $\boldsymbol{u} = \dfrac{1}{2G}\nabla\Phi$ удовлетворяет разрешающему уравнению теории упругости в форме Ламе (при отсутствии объемных сил):

$$\Delta\boldsymbol{u} + \frac{1}{(1-2\mu)}\nabla\cdot\boldsymbol{u}\nabla = \boldsymbol{0}.$$

Попытаемся среди известных нам гармонических функций найти такую скалярную функцию Φ, которая отвечала бы требуемым свойствам симметрии и подобия.

Симметрия $\Rightarrow$ в решение могут входить лишь вектор $\boldsymbol{k}$, определяющий ось z и радиус-вектор $\boldsymbol{x}$ рассматриваемого элементарного объема (отметим, что $z = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{k}$).

Подобие $\Rightarrow$ искомая гармоническая функция перемещений $\boldsymbol{u}^* = \dfrac{1}{2G}\nabla\Phi$ должна быть обратно пропорциональна модулю радиус-вектора, как и в задаче Кельвина.

Такая функция существует:

$$\Phi = B\ln(x+z).$$

Покажем, что она является гармонической.

$$\nabla\Phi = \nabla\left[B\ln(x+z)\right] = \frac{B}{x+z}(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k});$$

$$\nabla\nabla\Phi = B\left[-\frac{(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k})(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k})}{(x+z)^2} + \frac{1}{x+z}\left(\frac{\nabla\boldsymbol{x}}{x} - \frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}{x^3} + \underbrace{\nabla\boldsymbol{k}}_{0}\right)\right] =$$

$$= B\left[\frac{\boldsymbol{I}-\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}}{x(x+z)} - \frac{(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k})(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k})}{(x+z)^2}\right] = B\left[\frac{\boldsymbol{I}-\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}}{x^2(1+\theta)} - \frac{\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}}{x^2(1+\theta)^2}\right];$$

$$\Delta\Phi = \nabla\nabla\cdot\Phi = B\left[\frac{2}{x^2(1+\theta)} - \frac{2+2\theta}{x^2(1+\theta)^2}\right] = 0,$$

следовательно Φ – гармоническая функция.

Итак, рассмотрим добавочную функцию перемещений:

$$\boldsymbol{u}^* = \frac{1}{2G}\nabla\Phi = \frac{B}{2G}\frac{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k}}{x+z}.$$

Соответствующее добавочное напряжение определяется выражением:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \nabla\nabla\Phi = B\left(\frac{\boldsymbol{I}-\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}}{x^2(1+\theta)} - \frac{\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}}{x^2(1+\theta)^2}\right).$$

Напряжения на плоскости $z=0$ (отметим, что при этом $\theta = 0$):

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \frac{B}{x^2}\left(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{nn} - \boldsymbol{nk} - \boldsymbol{kn} - \boldsymbol{kk}\right).$$

Напряжения на этой плоскости на площадке с нормалью $\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{\sigma}_{tk}{}^* = \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \boldsymbol{k} = -\frac{B}{x^2}\boldsymbol{n}\,.$$

Приравнивая эти напряжения к напряжениям, полученным в задаче Кельвина, с обратным знаком найдем константу B:

$$-\frac{B}{x^2} = \frac{(1-2\mu)P}{8\pi x^2 (1-\mu)} \;\Rightarrow\; B = -\frac{(1-2\mu)P}{8\pi(1-\mu)}.$$

Таким образом, искомые добавочные поля в задаче Буссинеска:

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{x}) = \nabla\nabla\Phi = \frac{(1-2\mu)P}{8\pi x^2 (1-\mu)}\left(\frac{\boldsymbol{nn} + 2\boldsymbol{nk}_{\mathrm{S}} + \boldsymbol{kk}}{(1+\theta)^2} - \frac{\boldsymbol{I} - \boldsymbol{nn}}{1+\theta}\right);$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2G} = \frac{(1-2\mu)P}{8E\pi x^2}\left(\frac{\boldsymbol{nn} + 2\boldsymbol{nk}_{\mathrm{S}} + \boldsymbol{kk}}{(1+\theta)^2} - \frac{\boldsymbol{I} - \boldsymbol{nn}}{1+\theta}\right);$$

$$\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2G}\nabla\Phi = -\frac{P}{8E\pi x}(1-2\mu)\frac{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k}}{1+\theta}.$$

Решение задачи Буссинеска получаем суперпозицией решения задачи Кельвина и найденных добавочных полей:

поле напряжений: $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\sigma}^{\textbf{\textit{кельв}}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{x}) =$

$$= -\frac{P(1-2\mu)}{8\pi x^2 (1-\mu)}\left[2\boldsymbol{nk}_{\mathrm{S}} - \theta\boldsymbol{I} + \frac{3\theta\boldsymbol{nn}}{(1-2\mu)} - \frac{\boldsymbol{nn} + 2\boldsymbol{nk}_{\mathrm{S}} + \boldsymbol{kk}}{(1+\theta)^2} + \frac{\boldsymbol{I} - \boldsymbol{nn}}{1+\theta}\right];$$

поле деформаций: $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}^{\textbf{\textit{кельв}}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{x}) =$

$$= \frac{P(1-2\mu)}{8E\pi x^2}\left[\frac{(1-2\mu)\theta}{(1+\mu)}\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{nk}_S - 3\theta\boldsymbol{nn} + \right.$$

$$\left. \frac{\boldsymbol{nn} + 2\boldsymbol{nk}_S + \boldsymbol{kk}}{(1+\theta)^2} - \frac{\boldsymbol{I} - \boldsymbol{nn}}{1+\theta}\right];$$

поле смещений: $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{кельв}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}) =$

$$= \frac{P}{8E\pi x}(\theta\boldsymbol{n} + (3-4\mu)\boldsymbol{k} - (1-2\mu)\frac{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k}}{1+\theta}).$$