

6. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ НЕОДНОРОДНОМ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ

Основная цель теории упругости – это определение полей напряжений и перемещений во всем объеме упругого тела для их последующего использования в расчетах на прочность и жесткость. Однако теория однородного напряженно-деформированного состояния, описанная в третьей главе, позволяет решать только узкий класс задач теории упругости, соответствующих только тем внешним воздействиям, которые реализуют в каждой точке тела одинаковое напряженно-деформированное состояние (однородное). Поэтому в данной главе мы определим дифференциальные уравнения, позволяющие связать поля напряжений и перемещений в упругом теле с соответствующими полями внешних воздействий – силовых и кинематических. Эти уравнения вместе с законом Гука и соответствующими краевыми условиями будут образовывать замкнутую систему уравнений теории упругости, которая является универсальной и отвечает произвольным внешним воздействиям на упругое тело.

Как и раньше, будем полагать, что материал представляет собой сплошную среду, деформации малы, а физические свойства материала при однородном и неоднородном напряженно-деформированном состоянии не отличаются.

6.1. Дифференциальные уравнения равновесия

Рассмотрим упругое тело, находящееся в равновесии под действием заданной системы сил. Согласно методу сечений, если все тело находится в равновесии, то и любая его часть под действием внешних и внутренних сил тоже должна находиться в равновесии. Поэтому рассечем мысленно это тело плоскостью на две части и рассмотрим равновесие одной из них (рис.6.1).

Обозначим точки на поверхности тела радиус-векторами \mathbf{x}^* (в том числе и на поверхности сечения, образовавшегося после разделения тела на две части), а внутренние точки – радиус-векторами \mathbf{x} . Силы, действующие на тело, условно разделим на поверхностные силы (абсолютно близкодействующие, если судить по источнику воздействия) и объемные (абсолютно далекодействующие). Ограничимся рассмотрением только распределенных сил; сосредоточенные силы при необходимости можно определить, как равнодействующие равномерно распределенных сил по определенному (малому) элементу поверхности или объема. Интенсив-

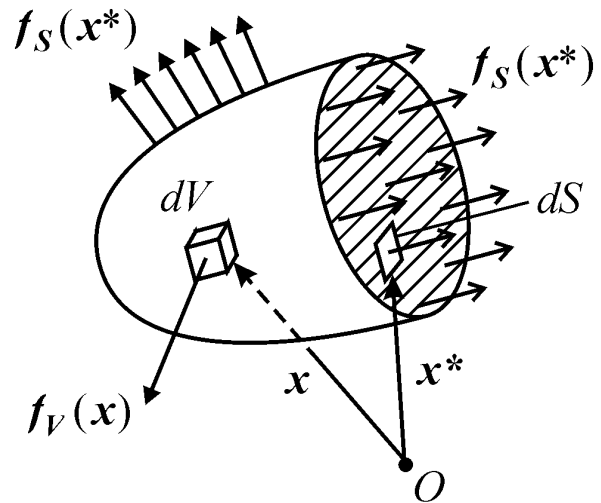


Рис.6.1. Часть тела, находящаяся в равновесии

ность поверхностных сил будем обозначать $\mathbf{f}_S(\mathbf{x}^*)$ (их размерность Н/м²), а интенсивность объемных сил обозначим $\mathbf{f}_V(\mathbf{x})$ (размерность Н/м³).

Рассмотрим равновесие по силам: главный вектор всех сил, приложенных к рассматриваемой части тела должен быть равен нулю:

$$\mathbf{R} = \int_S \mathbf{f}_S(\mathbf{x}^*) dS + \int_V \mathbf{f}_V(\mathbf{x}) dV = \mathbf{0}.$$

Из этого выражения следует:

$$\int_S \mathbf{f}_S dS = - \int_V \mathbf{f}_V dV.$$

Сравнивая это выражение с формулой Остроградского – Гаусса с вариантом скалярного произведения:

$$\int_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \mathbf{T} \cdot \nabla dV,$$

получим два независимых выражения

$$\mathbf{f}_S = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \text{ и } -\mathbf{f}_V = \mathbf{T} \cdot \nabla.$$

Из первого выражения следует, что тензор \mathbf{T} представляет собой тензор напряжений (по определению). С учетом этого второе выражение примет вид:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla + \mathbf{f}_V = \mathbf{0}, \quad (6.1)$$

то есть дивергенция поля напряжений в упругом теле равна полю объемных сил, взятому с обратным знаком. Это выражение называют **дифференциальным уравнением равновесия** и иногда пользуются его координатной или матричной формой записи:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_{Vi} = 0, \quad [\boldsymbol{\sigma}]^T [\nabla] = -[\mathbf{f}_V],$$

что соответствует трем линейно независимым скалярным уравнениям.

Теперь рассмотрим равновесие по моментам: главный момент всех сил, приложенных к рассматриваемой части тела, относительно, например, начала координат должен быть равен нулю:

$$\mathbf{M}_O = \int_S \mathbf{x}^* \times \mathbf{f}_S dS + \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{f}_V dV = \mathbf{0},$$

то есть

$$\int_S \mathbf{x}^* \times \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS - \int_V \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla dV = \mathbf{0}.$$

Применив теорему Остроградского – Гаусса к первому интегралу, получим

$$\int_S \mathbf{x}^* \times \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}) \cdot \nabla dV.$$

Подставив полученный результат в предыдущее выражение, после преобразований получим:

$$\int_V [(\mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}) \cdot \nabla - \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla] dV = \mathbf{0}.$$

Подынтегральное выражение должно быть равно нулю

$$(\mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}) \cdot \nabla - \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla + \underbrace{\mathbf{x} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^T}_{\otimes} - \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla = \mathbf{0};$$

$$\underbrace{\mathbf{x} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^T}_{\otimes} = \underbrace{\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T}_{\otimes} = \underbrace{\boldsymbol{\sigma}^T}_{\otimes} = \mathbf{0},$$

отсюда следует *симметрия тензора напряжений*.

При решении задач дифференциальное уравнение равновесия обычно дополняют соответствующими граничными условиями. При этом поверхность рассматриваемого тела условно делят на две части: площадь первой части, в точках которой заданы силы (в том числе равные нулю) $\mathbf{f}_S(\mathbf{x}^*)$, обозначают $S_{\boldsymbol{\sigma}}$, а площадь оставшейся части, в точках которой известны перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{x}^{**})$, обозначают S_u :

$$S_{\boldsymbol{\sigma}} + S_u = S.$$

Граничные условия, заданные на поверхности $S_{\boldsymbol{\sigma}}$ будем называть *силовыми*; они записываются следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_S, \mathbf{x}^* \in S_{\boldsymbol{\sigma}},$$

здесь вектор \mathbf{n} – это внешняя нормаль к элементарной площадке на поверхности тела. Это выражение напрямую следует из определения тензора напряжений, если рассматривать элементарную площадку именно на поверхности тела, а не внутри него. В этом случае проекция тензора напряжений на нормаль \mathbf{n} дает элементарную силу, которая, по сути, является интенсивностью внешней силы на этой площадке.

Если граничные условия заданы на поверхности S_u , то их называют *кинематическими* и записывают так:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^{**}) = \mathbf{u}^*, \mathbf{x}^{**} \in S_u$$

Пример №1. Определим граничные условия на поверхности призмы, изображенной на рис.6.2. Поверхность S_u призмы в этой задаче представлена тремя точками: A , B и C , в которых заданы кинематические граничные условия:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_A) \cdot \mathbf{e}_3 = 0, \mathbf{u}(\mathbf{x}_B) = \mathbf{0}, \mathbf{u}(\mathbf{x}_C) = \mathbf{0}.$$

Остальные точки поверхности представляют поверхность S_σ , в точках которой поверхностные силы равны нулевому вектору:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0},$$

за исключением поверхности DKL , где граничные условия имеют вид:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{e}_3 = -q.$$

Пример №2. Определим силы, действующие на параллелепипед, изображенный на рис.6.3, если он испытывает следующие напряжения в заданной системе координат:

$$\sigma_{11}(\mathbf{x}) = 2x_1^2, \sigma_{12}(\mathbf{x}) = \sigma_{21}(\mathbf{x}) = -x_1x_2, \sigma_{33}(\mathbf{x}) = x_1x_3^2.$$

Сначала найдем внешние силы, распределенные по объему тела. Для этого удобно воспользоваться дифференциальным уравнением равновесия в матричной форме:

$$[\mathbf{f}_V] = -[\boldsymbol{\sigma}]^T [\nabla];$$

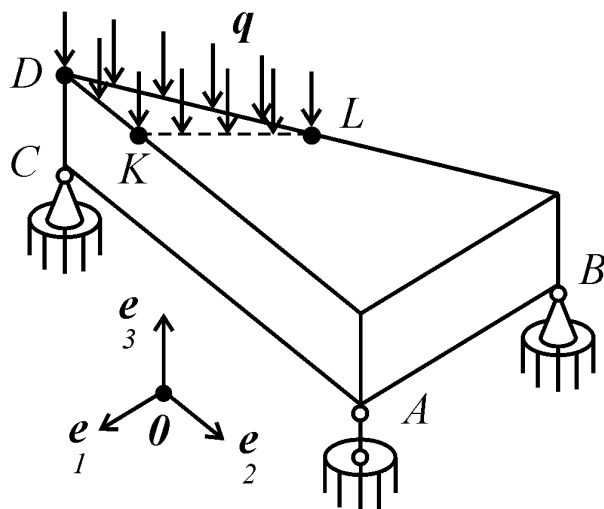


Рис.6.2. Призма

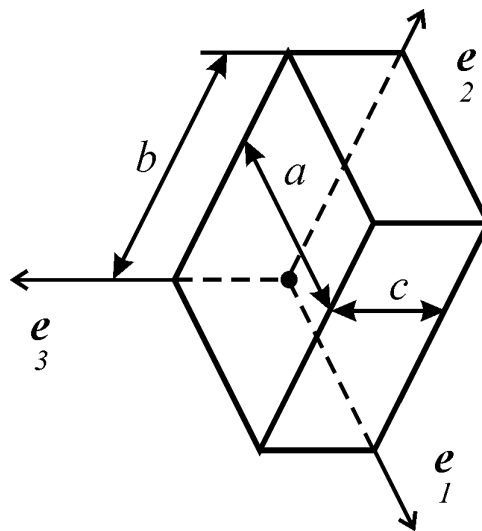


Рис.6.3. Параллелепипед

$$[f_V(\mathbf{x})] = - \begin{bmatrix} 2x_1^2 & -x_1x_2 & 0 \\ -x_1x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1 \\ x_2 \\ -2x_1x_3 \end{bmatrix},$$

то есть вектор объемных сил имеет вид:

$$f_V(\mathbf{x}) = -3x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 - 2x_1x_3 \mathbf{e}_3.$$

Теперь определим внешние силы, действующие на гранях параллелепипеда.

Нагрузка, распределенная по грани с нормалью \mathbf{e}_1 имеет вид:

$$f_{S1}(\mathbf{x}^*) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_1 = 2x_1^2 \mathbf{e}_1 - x_1x_2 \mathbf{e}_2 = 2a^2 \mathbf{e}_1 - ax_2 \mathbf{e}_2$$

с учетом того, что на этой грани $x_1 = a$. Нагрузки, распределенные по граням с нормальми \mathbf{e}_2 и \mathbf{e}_3 , получаются аналогично:

$$f_{S2}(\mathbf{x}^*) = -x_1x_2 \mathbf{e}_1 = -bx_1 \mathbf{e}_1, \quad f_{S3}(\mathbf{x}^*) = x_1x_3^2 \mathbf{e}_3 = c^2 x_1 \mathbf{e}_3.$$

6.2. Уравнение Коши

Пусть в упругом теле задано векторное поле смещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, возникшее вследствие некоей дисторсии $\mathbf{D}(\mathbf{x})$. В результате точки тела A и B переместились в новые положения A' и B' (рис.6.4). Запишем вектор \mathbf{AB}' двумя способами:

$$\begin{cases} \mathbf{AB}' = d\mathbf{x} + (\mathbf{u} + d\mathbf{u}) \\ \mathbf{AB}' = \mathbf{u} + d\mathbf{x}' \end{cases}.$$

Отсюда следует, что дифференциал векторного поля равен изменению дифференциала аргумента

$$d\mathbf{u} = d\mathbf{x}' - d\mathbf{x}. \quad (6.2)$$

С другой стороны, вспомним, что дифференциал векторного поля – это линейная функция дифференциала аргумента, где оператором линейной связи является градиент (обобщение формулы Ньютона – Лейбница):

$$d\mathbf{u} = \mathbf{u} \nabla \cdot d\mathbf{x}. \quad (6.3)$$

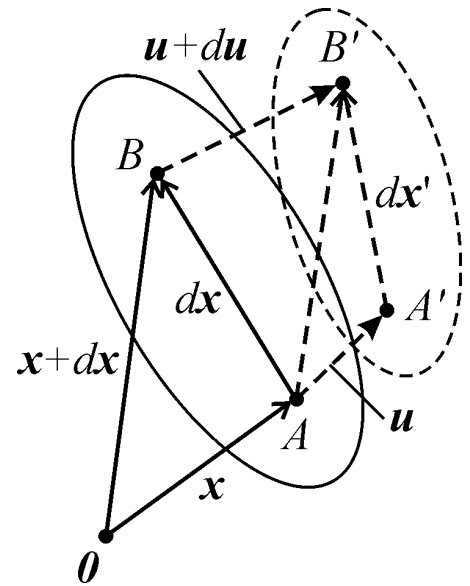


Рис. 6.4.

Дисторсия в упругом теле

Сравнивая выражения (6.2) и (6.3), получим выражение, отражающее линейную связь между вектором dx и его изменением ($dx' - dx$) в результате дисторсии:

$$dx' - dx = u \nabla \cdot dx,$$

вспомним, что тензорным оператором в таком выражении по определению является тензор дисторсии

$$u \nabla \equiv D.$$

Симметричная часть этого тензора представляет собой тензор деформации (по определению):

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv D_S = (u \nabla)_S = \frac{1}{2}(u \nabla + \nabla u) \quad (6.4)$$

Это выражение называют *уравнением Коши*. В координатной и матричной форме соответственно оно имеет вид:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_i}{dx_j} + \frac{du_j}{dx_i} \right), \quad [\boldsymbol{\varepsilon}] = \frac{1}{2} ([u][\nabla]^T + [\nabla][u]^T),$$

что соответствует трем линейно независимым скалярным уравнениям.

Поле смещений в сплошном теле должно быть гладким (необходимое условие дифференцируемости поля). Этот факт накладывает на поле деформаций некоторые ограничения: не любое поле деформаций, удовлетворяющее уравнению Коши, соответствует какому-то гладкому полю смещений: то есть после деформации кубики, изображенные на рис.6.5, должны уложиться без пустот и наложений плотно в единое целое, это означает, что деформации должны быть совместны.

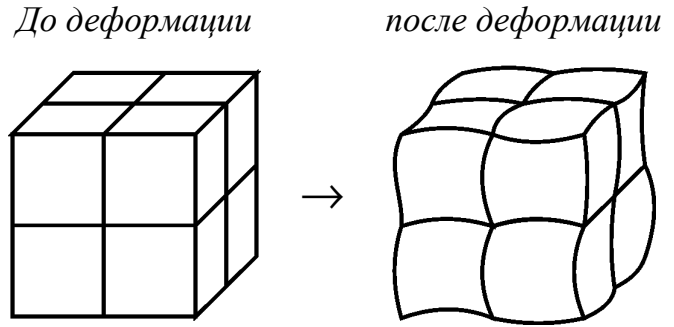


Рис.6.5. Иллюстрация совместности деформаций

Если взять сначала левый, а затем правый ротор от уравнения Коши (с учетом равенства нулю ротора градиента):

$$\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla = \frac{1}{2} \nabla \times (u \nabla + \nabla u) \times \nabla = \frac{1}{2} (\nabla \times u \nabla) \times \nabla = \mathbf{0},$$

получим тензорное уравнение с одним неизвестным полем – полем деформаций:

$$\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla = \mathbf{0}. \quad (6.5)$$

Это уравнение называется *условием совместности деформаций*. Вспомним, что выражение (6.5) эквивалентно выражению (см. пример №11 раздела «Тензорное дифференцирование»)

$$(\nabla \boldsymbol{\varepsilon} \nabla + \nabla \boldsymbol{\varepsilon} \nabla)_{IT2} = \mathbf{0}. \quad (6.6)$$

В координатной форме оно имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_l},$$

что соответствует шести независимым скалярным уравнениям (см. выражения (4.12) – (4.15) раздела «Тензорное дифференцирование»). Кроме того, условие совместности деформаций иногда записывают в следующей форме:

$$\nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} - (\nabla \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \nabla + \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \nabla) + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \nabla \nabla \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} = \mathbf{0}. \quad (6.7)$$

Она получается путем набора всех симметричных двухвалентных выражений, содержащих тензор деформации и его двойное дифференцирование.

Пример №3. В результате некоторой дисторсии в упругом теле реализовано следующее поле перемещений:

$$u_1 = x_2^3, u_2 = 2x_3^2 - x_2, u_3 = 6x_3x_2.$$

Определим тензоры дисторсии и деформации. Для этого воспользуемся матричной формой записи:

$$[\mathbf{D}] = [\mathbf{u}][\nabla]^T = \begin{bmatrix} x_2^3 \\ 2x_3^2 - x_2 \\ 6x_3x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3x_2^2 & 0 \\ 0 & -1 & 4x_3 \\ 0 & 6x_3 & 6x_2 \end{bmatrix}.$$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \frac{1}{2} [[\mathbf{D}] + [\mathbf{D}]^T] = \begin{bmatrix} 0 & 1,5x_2^2 & 0 \\ 1,5x_2^2 & -1 & 5x_3 \\ 0 & 5x_3 & 6x_2 \end{bmatrix}.$$

Пример №4. Проверим, является ли поле деформаций

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (3x_1^2 - x_3) \underset{11}{\mathbf{e}\mathbf{e}} + 4x_2 \underset{12}{\mathbf{e}\mathbf{e}} + 4x_2 \underset{21}{\mathbf{e}\mathbf{e}} + 6x_3 \underset{33}{\mathbf{e}\mathbf{e}}$$

совместным. Воспользуемся условием совместности деформаций (6.5) и вычислим сначала левый ротор тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 \right) \times \\ &\times \left((3x_1^2 - x_3) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + 4x_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + 4x_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + 6x_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \right) = -1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 - 4 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

а затем правый ротор полученного выражения:

$$\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla = (-1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 - 4 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2) \times \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 \right) = \mathbf{0}.$$

Равенство результата нулю показывает, что заданное поле деформаций оказалось совместно.

6.3. Полная система уравнений теории упругости

Анализ уравнений, полученных в предыдущих параграфах, показывает, что дифференциальное уравнение равновесия упругого тела позволяет решить задачу теории упругости об определении внешних нагрузок, действующих на него, при известном поле напряжений, а уравнение Коши позволяет определить тензор деформаций по известному полю перемещений. Однако решить обратные задачи с помощью только этих двух уравнений невозможно, поскольку в каждом случае эти задачи оказываются статически неопределимыми (число уравнений меньше числа неизвестных). Поэтому в теории упругости рассматривают замкнутую систему уравнений – *систему основных уравнений теории упругости*, – которая позволяет решать задачи о нахождении напряжений и перемещений, отвечающих заданным внешним воздействиям. Эта система включает в себя следующие уравнения.

1. Уравнение равновесия:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_V(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

тензор напряжений должен быть симметричным: $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})^T$.

2. Уравнение Коши:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})]_S = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \nabla),$$

где тензор деформаций должен удовлетворять условию совместности деформаций:

$$\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \times \nabla = \mathbf{0}.$$

3. Закон Гука:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}).$$

4. Граничные условия: силовые ($\mathbf{x}^* \in S_\sigma$) и кинематические ($\mathbf{x}^{**} \in S_u$) соответственно:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_S, \mathbf{u}(\mathbf{x}^{**}) = \mathbf{u}^*.$$

Первые три пункта (уравнение равновесия, уравнение Коши и связывающий их закон Гука) справедливы для всех точек внутри тела, а четвертый пункт (граничные условия) выполняется во всех точках поверхности этого тела.

6.4. Принцип возможных перемещений

Поле возможных перемещений $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x})$ будем называть любое поле бесконечно малых смещений точек тела, допускаемое связями: внутренними (то есть оно должно удовлетворять условиям совместности деформаций) и внешними (то есть оно должно удовлетворять кинематическим граничным условиям). Среди множества полей возможных перемещений тела всегда существует одно *поле действительных перемещений* $d\mathbf{u}(\mathbf{x})$, которое соответствует конкретным нагрузкам, действующим на это тело.

Пусть тело нагружено объемными \mathbf{f}_V и поверхностными \mathbf{f}_S силами, вызывающими поле напряжений $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$. Рассмотрим векторное поле

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}),$$

характеризующее работу напряжений на произвольных возможных перемещениях (подчеркнем, что возможные перемещения никак не связаны с заданными нагрузками и, соответственно, напряжениями), и найдем его дивергенцию

$$\nabla \cdot \mathbf{t} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot (\nabla \delta \mathbf{u}). \quad (6.8)$$

Первое слагаемое в правой части равенства содержит дивергенцию поля напряжений, которая, согласно уравнению равновесия, равна взятому с обратным знаком полю объемных сил, а второе слагаемое можно записать в виде

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot (\nabla \delta \mathbf{u})_S = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot (\delta \mathbf{D})_S = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Здесь учли симметрию тензора напряжений. В результате выражение (6.8) принимает вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{t} = -\mathbf{f}_V \cdot \delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Проинтегрируем его по объему

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{t} dV = -\int_V \mathbf{f}_V \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV,$$

применим к левой части формулу Остроградского–Гаусса

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{t} dV = \int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} dS = \int_S \mathbf{f}_S \cdot \delta \mathbf{u} dS$$

и подставим результат в предыдущее выражение:

$$\underbrace{\int_S \mathbf{f}_S \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_V \mathbf{f}_V \cdot \delta \mathbf{u} dV}_{\text{работа внешних сил на возможных смещениях}} = \underbrace{\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV}_{\text{работа внутренних сил на возможных смещениях}} \quad (6.9)$$

Полученное выражение называют **принципом возможных перемещений** для деформируемого тела, он гласит: суммарная работа внешних сил на любых возможных перемещениях равна работе внутренних сил на соответствующих этим перемещениям возможных деформациях.

Принцип возможных перемещений заменяет условия равновесия, если известно поле смещений, или он заменяет условие совместности деформаций, если известно поле напряжений в условиях равновесия.

Пример №5. Механизм (рис.6.6а) нагружен двумя сосредоточенными силами P и R , а также парой сил с моментом M . Определим, какова должна быть сила R , чтобы механизм находился в равновесии.

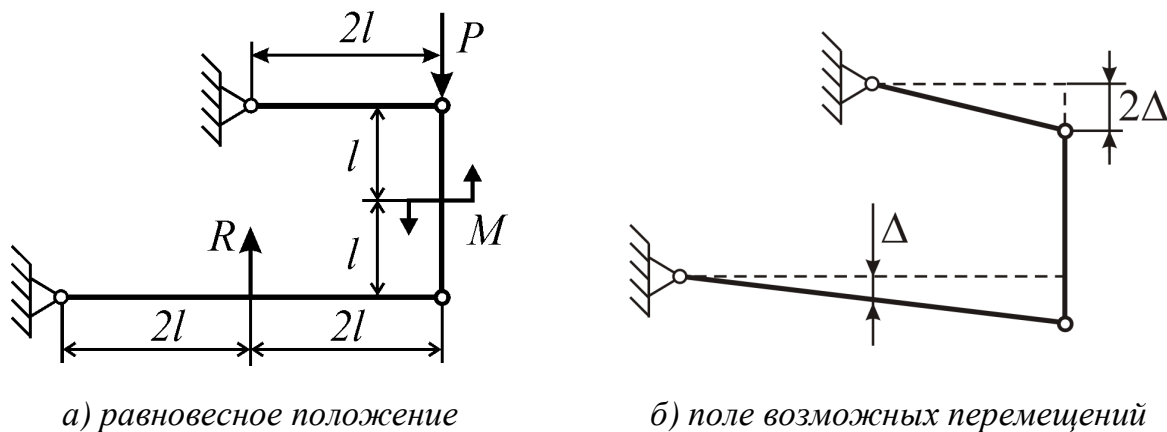


Рис.6.6. Механизм

Зададимся полем возможных перемещений (рис.6.6б). Ввиду их бесконечной малости, горизонтальными составляющими перемещений будем пренебрегать. Согласно принципу возможных перемещений, работа внешних сил на заданных бесконечно малых перемещениях должна уравниваться работой внутренних сил.

$$\int_S \mathbf{f}_S \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_V \mathbf{f}_V \cdot \delta \mathbf{u} dV = \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV.$$

Во время движения механизма его звенья не деформируются ($\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$), а только перемещаются в плоскости, кроме того, отсутствуют объемные силы ($\mathbf{f}_V = \mathbf{0}$), поэтому в данном случае принцип возможных перемещений принимает вид:

$$\int_S \mathbf{f}_S \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0 \Leftrightarrow P * 2 \Delta + M * \varphi - R * \Delta = 0.$$

Учитывая, что угол поворота сечения, в котором приложена пара сил равен нулю ($\varphi = 0$), получим, что $R = 2P$.

В данной задаче принцип возможных перемещений заменил условие равновесия.

Пример №6. Определим условия равновесия стержневой системе (рис.6.7а) с помощью принципа возможных перемещений.

Обозначим усилия в стержнях N_1 , N_2 и N_3 , а возможное перемещение точки приложения силы $\delta \mathbf{u}$, как показано на рис.6.7б, тогда принцип возможных перемещений для рассматриваемой системы примет вид:

$$P \cdot \delta \mathbf{u} = N_1 \varepsilon_1 l_1 + N_2 \varepsilon_2 l_2 + N_3 \varepsilon_3 l_3,$$

где ε_1 , ε_2 и ε_3 – это продольные деформации соответствующих стержней.

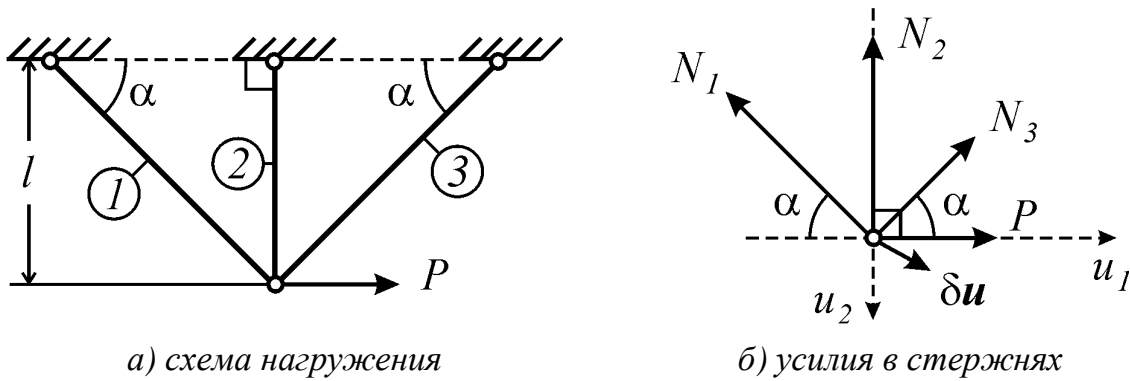


Рис.6.7. Стержневая система

Представим возможное перемещение точки приложения силы P в координатной форме

$$\delta \mathbf{u} = \delta u_1 \mathbf{e}_1 + \delta u_2 \mathbf{e}_2$$

и зададимся полями возможных смещений, соответствующими каждой из независимых координат. Рассмотрев поле возможных смещений, соответствующее координате δu_1 (рис.6.8а), получим:

$$P \delta u_1 \cos \theta = N_1 \Delta l_1 + N_2 \Delta l_2 + N_3 \Delta l_3,$$

$$P \delta u_1 = N_1 \delta u_1 \cos \alpha - N_3 \delta u_1 \cos \alpha.$$

Отсюда следует первое уравнения равновесия:

$$P = (N_1 - N_3) \cos \alpha.$$

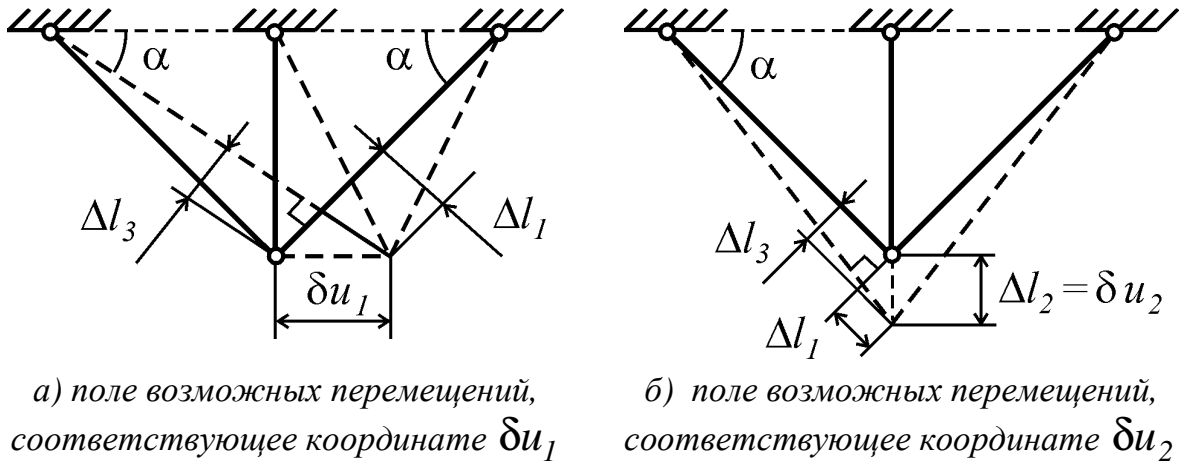


Рис.6.8. Поля возможных перемещений

Теперь рассмотрим поле возможных смещений, соответствующее координате δu_2 (рис.6.8б):

$$P \delta u_1 \cos 90 = N_1 \Delta l_1 + N_2 \Delta l_2 + N_3 \Delta l_3,$$

$$0 = N_1 \delta u_2 \sin \alpha - N_2 \delta u_2 + N_3 \delta u_2 \sin \alpha.$$

Отсюда следует второе уравнения равновесия:

$$N_2 + (N_1 + N_3) \sin \alpha = 0.$$

Для проверки полученного решения можно спроецировать силы, приложенные к узлу (см. рис.6.7б), на координатные оси. В результате получим те же самые уравнения равновесия.

В этой задаче принцип возможных перемещений снова заменил условия равновесия.

Пример №7. Найдем условие совместности деформаций для стержневой системы, рассмотренной в предыдущем примере. Условие совместности деформаций соответствует случаю отсутствия внешних сил, при этом принцип возможных перемещений имеет вид:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = 0.$$

Выразим усилия во всех стержнях через усилие в первом стержне из уравнений равновесия, полученных в предыдущем примере при условии равенства нулю внешней силы:

$$N_3 = N_1, N_2 = -2N_1 \sin \alpha.$$

Подставив полученные значения усилий в принцип возможных перемещений:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = N_1 \varepsilon_1 l_1 + N_2 \varepsilon_2 l_2 + N_3 \varepsilon_3 l_3 =$$

$$= N_1 \varepsilon_1 \frac{l}{\sin \alpha} + 2N_1 \sin \alpha \varepsilon_2 l + N_1 \varepsilon_3 \frac{l}{\sin \alpha} = 0,$$

получим условие совместности деформаций:

$$\varepsilon_1 - 2 \sin^2 \alpha \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0.$$

Здесь принцип возможных перемещений заменил условие совместности деформаций.

6.5. Закон сохранения энергии

Пусть в начальный момент времени состояние тела определяется следующими полями:

$$\mathbf{f}_S, \mathbf{f}_V, \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma} \text{ и } \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Допустим, что за время dt параметры состояния тела изменились соответственно на величины

$$d\mathbf{f}_S, d\mathbf{f}_V, d\mathbf{u}, d\boldsymbol{\sigma} \text{ и } d\boldsymbol{\varepsilon}.$$

При этом окружающая среда потеряла энергию, равную работе внешних сил

$$dA = \int_S \mathbf{f}_S \cdot d\mathbf{u} dS + \int_V \mathbf{f}_V \cdot d\mathbf{u} dV,$$

а потенциальная энергия упругой деформации тела выросла на величину

$$dW = \int_V d\psi dV = \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} dV.$$

Отметим, что поля \mathbf{f}_S , \mathbf{f}_V , и $\boldsymbol{\sigma}$ отвечают условиям равновесия, а соответствующие им поля $d\mathbf{u}$ и $d\boldsymbol{\varepsilon}$ бесконечно малы, совместны и соответствуют кинематическим граничным условиям. Значит можно использовать принцип возможных перемещений, подставив вместо возможных полей $\delta\mathbf{u}$ и $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ действительные поля $d\mathbf{u}$ и $d\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_S \mathbf{f}_S \cdot d\mathbf{u} dS + \int_V \mathbf{f}_V \cdot d\mathbf{u} dV. \quad (6.10)$$

Таким образом, обнаружили, что вся энергия, потерянная окружающей средой полностью расходуется на изменение потенциальной энергии тела, то есть выполняется *закон сохранения энергии*.

6.6. Устойчивость

Если материал конструкции устойчив, то в каждой точке тела, согласно постулату Друкера, должно выполняться следующее соотношение:

$$d\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} \geq 0.$$

Подставим в закон сохранения энергии (6.10) вместо полей f_S , f_V и σ поля соответствующих приращений df_S , df_V и $d\sigma$, удовлетворяющие условиям равновесия:

$$\int_V \underbrace{d\sigma \cdot d\varepsilon}_{\geq 0} dV = \int_S df_S \cdot du dS + \int_V df_V \cdot du dV,$$

то есть,

$$\int_S df_S \cdot du dS + \int_V df_V \cdot du dV \geq 0.$$

В результате получили **принцип устойчивости**: работа приращений нагрузок на соответствующих приращениях смещений всегда неотрицательна. Этот принцип справедлив для любого тела, выполненного из устойчивого материала.

Из закона Гука

$$\sigma_0 = 3K_0\varepsilon_0, S = 2Ge, \sigma = \sigma_0 I + S.$$

с учетом принципа устойчивости следует, что константы упругости должны быть неотрицательны. Учтем теперь связь между ними:

$$3K_0 = \frac{E}{1-2\mu} > 0 \quad \Rightarrow \quad \mu < 0,5;$$

$$2G = \frac{E}{1+\mu} > 0 \quad \Rightarrow \quad \mu > -1.$$

Итак, согласно принципу устойчивости, коэффициент Пуассона может находиться в следующих пределах

$$-1 < \mu < 0,5. \quad (6.11)$$

Однако следует отметить, что для реальных материалов отрицательного коэффициента Пуассона не бывает; для реальных материалов имеем

$$0 < \mu < 0,5.$$

6.7. Однозначность решения

Предположим, что в ответ на внешнее воздействие в теле могут существовать две различные реакции, удовлетворяющие основным уравнениям теории упругости:

$$\text{воздействие: } f_S, f_V \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1, \varepsilon_1, u_1 \\ \sigma_2, \varepsilon_2, u_2 \end{cases} \quad - \text{ две реакции.}$$

Тогда разницы между полученными значениями реакций составят:

$$\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1, \Delta\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \Delta u = u_2 - u_1,$$

и эти разницы должны отвечать нулевым внешним воздействиям. Но из закона сохранения энергии следует, что при отсутствии внешних сил работа внутренних сил равна нулю

$$\int_V \Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon dV = 0.$$

Согласно постулату Друкера, для устойчивого материала $\Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon \geq 0$, а интеграл от неотрицательной функции равен нулю только тогда, когда вся функция (во всей области) равна нулю. Это означает, что $\Delta\sigma = 0$, а из основных уравнений теории упругости следует, что и $\Delta\varepsilon = 0$, и $\Delta u = 0$, то есть два решения совпадают, что доказывает однозначность решения.

6.8. Свойства симметрии

Из однозначности решения задачи теории упругости следует **принцип детерминизма**: две одинаковые конструкции при одинаковых воздействиях деформируются одинаково. Следствия из этого принципа – закон прямой симметрии и принцип косо́й симметрии.

Закон прямой симметрии гласит: реакция симметричной конструкции на симметричное воздействие симметрична (симметричные части можно рассматривать как самостоятельные конструкции при одинаковой нагрузке).

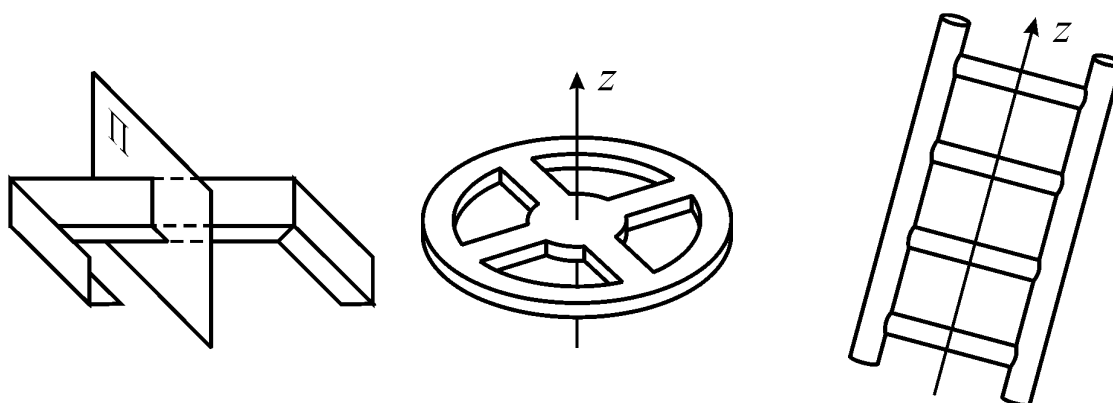
Принцип косо́й симметрии: реакция симметричной конструкции на косо́симметричное воздействие косо́симметрична. Отметим, что принцип косо́й симметрии, по сути, не является законом. Это объясняется тем, что у материала могут оказаться разные свойства при растяжении и сжатии (например, если это хрупкий или анизотропный материал). Использовать принцип косо́й симметрии можно с уверенностью только в том случае, когда свойства материала при растяжении и сжатии совпадают, например, для линейно-упругого материала.

Существует три типа симметрии: зеркальная, осевая (различной кратности) и поступательная (ступенчатая). Если зеркально отразить раму, сваренную из трех уголков (как показано на рис.6.9а) относительно плоскости Π , то вид конструкции от этого не изменится. В таких случаях говорят о зеркальной симметрии конструкции относительно плоскости Π . Об осевой симметрии говорят в тех случаях, когда конструкция не меняется при повороте на угол α относительно некоторой оси. Эту ось называют осью симметрии. Например, если тело, изображенное на рис.6.9б поворачивать по часовой стрелке (или против нее) относительно оси Z на угол

$$\alpha_n = n\pi/2 \quad (n = 1, 2 \dots \infty),$$

то конструкция не изменит своего вида. Отношение $2\pi/\alpha_1$ определяет кратность осевой симметрии. В данном случае она равна четырем. Фактически кратность показывает, сколько раз конструкция примет свой первоначальный

вид в процессе полного оборота относительно оси симметрии. Пример поступательной симметрии показан на рис.6.9в. Здесь общий элемент конструкции повторяется четыре раза через равные расстояния вдоль оси z , то есть кратность этой симметрии равна четырем.



а) зеркальная симметрия б) осевая симметрия в) ступенчатая симметрия

6.9.Примеры типов симметрии

У конструкции может быть одновременно несколько видов симметрии. Например, шар имеет бесконечное множество зеркальных и осевых симметрий, а правильный треугольник имеет осевую симметрию относительно центральной оси кратностью три и зеркальную симметрию относительно каждой из трех своих биссектрис.

Пример №7. Определим количество видов симметрии рамы с круглым поперечным сечением, изображенной на рис.6.10.

Очевидно, заданная конструкция имеет осевую симметрию относительно оси z кратностью два. Также не следует забывать и про зеркальную симметрию относительно плоскости xu , проходящую через центры тяжести поперечных сечений.

Пример №8. Определим число видов симметрии куба.

Куб имеет довольно много вариантов симметрии (рис.6.11), перечислим их. Три плоскости зеркальной симметрии типа Π_1 ; шесть плоскостей зеркальной симметрии типа Π_2 ; три оси симметрии кратностью четыре – y_1, y_2, y_3 ; четыре оси симметрии кратностью три – x_1, x_2, x_3 и x_4 ; шесть осей симметрии кратностью два – z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 и z_6 .

Таким образом получили, что всего у куба 22 вида симметрии: из них 9 видов зеркальной симметрии и 13 видов осевой.

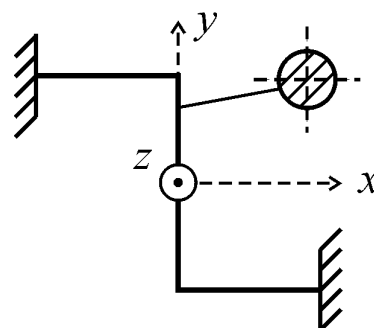


Рис.6.10.

Симметричная конструкция

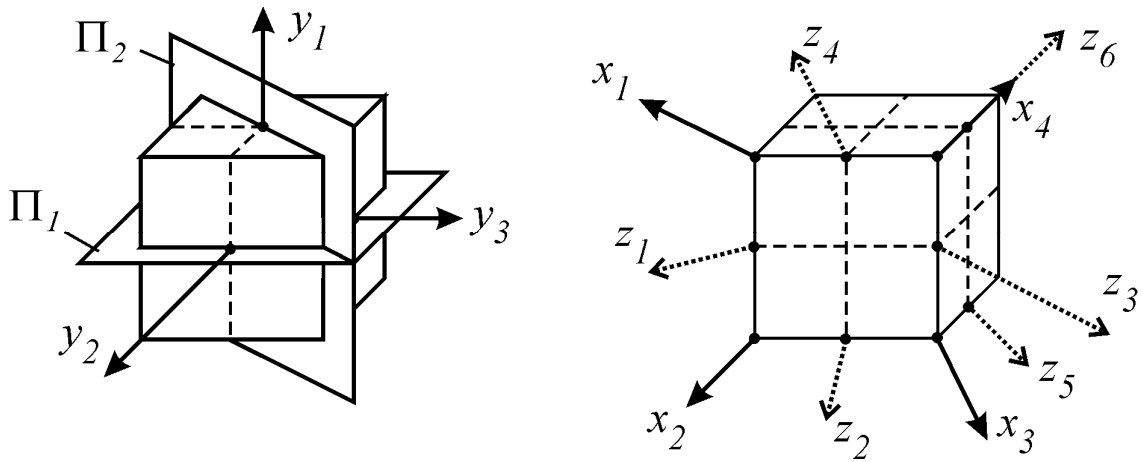
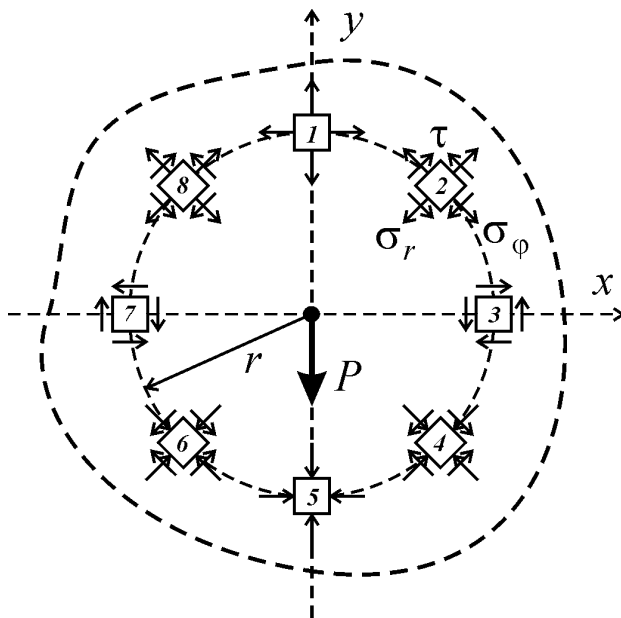


Рис.6.11. Виды симметрии куба

Пример №9. Дано неограниченное плоское тело, нагруженное сосредоточенной силой в начале координат (рис.6.12). Определим напряженное состояние в точках этого тела, удаленных от начала координат на расстояние r , с использованием законов симметрии.

В данном случае для наглядного представления напряженного состояния удобно воспользоваться полярной системой координат. При этом напряженное состояние в точке тела определяется тремя параметрами: радиальным напряжением σ_r , окружным σ_ϕ и касательным напряжением τ .



6.12. Плоское неограниченное тело

напряжения направлены таким образом, чтобы при отражении их направление не изменялось.

Теперь рассмотрим симметрию относительно оси x . Эта симметрия косая, следовательно, при отражении относительно оси x напряжения должны менять

Очевидно, заданное тело симметрично, а приложенная к нему нагрузка обладает прямой зеркальной симметрией относительно оси y и косой симметрией относительно оси x .

Рассмотрим зеркальную симметрию относительно оси y . Так как это прямая симметрия, то при отражении относительно оси y напряжения в точках конструкции должны сохраняться неизменными (и по величине и по направлению). Это означает, что в точках №1 и №5 отсутствуют касательные напряжения, так как при отражении они бы меняли направление. В остальных точках нормальные и касательные

направление на противоположное. Отсюда следует, что в точках №3 и №7 отсутствуют нормальные напряжения. Кроме того, в соответствующих точках, находящихся по разные стороны от оси x радиальные напряжения (как и окружные) должны быть разного знака.

Отметим, что для того, чтобы получить полную информацию о напряженном состоянии в точках этого тела, одних только соображений симметрии недостаточно: необходимо использовать основные уравнения теории упругости. Однако использование соображений симметрии существенно упрощает решение.

6.9. Принцип суперпозиции

Пусть известно некоторое состояние тела, которое описывается тензорными полями:

$$(\mathbf{f}_S)_1, (\mathbf{f}_V)_1, \mathbf{u}_1, \boldsymbol{\sigma}_1 \text{ и } \boldsymbol{\varepsilon}_1,$$

удовлетворяющими основным уравнениям теории упругости. Если все эти поля увеличить в λ раз, то получатся новые поля:

$$(\mathbf{f}_S)_2, (\mathbf{f}_V)_2, \mathbf{u}_2, \boldsymbol{\sigma}_2 \text{ и } \boldsymbol{\varepsilon}_2,$$

которые тоже будут отвечать основным уравнениям теории упругости. Согласно принципу суперпозиции, суммарным нагрузкам

$$\mathbf{f}_S = (\mathbf{f}_S)_1 + (\mathbf{f}_S)_2 \text{ и } \mathbf{f}_V = (\mathbf{f}_V)_1 + (\mathbf{f}_V)_2$$

будут соответствовать суммарные поля

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2.$$

Последнюю систему называют *принципом суперпозиции*. Принцип суперпозиции лежит в основе различных методов решения задач, в том числе и задач теории упругости. В частности, при несимметричном нагружении симметричной конструкции воздействие всегда можно разделить на два слагаемых: симметричное и кососимметричное. Реакция на каждое воздействие в отдельности находится значительно проще, чем на несимметричное, поскольку она также должна быть симметричной в первом случае и кососимметричной во втором. Получив эти решения, их затем нужно просто сложить.

Пользоваться принципом суперпозиции удобно, однако необходимо помнить, что этот принцип может быть использован только в рамках линейной упругости материалов.

6.10. Разрешающее уравнение теории упругости в перемещениях

Если краевые условия заданы в перемещениях (кинематические граничные условия), то решение задачи теории упругости также удобно искать в перемещениях. Найдем это решение. С этой целью подставим закон Гука в форме Ламе

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{3K_0 - 2G}{3} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} + 2G \boldsymbol{\varepsilon}$$

в дифференциальное уравнение равновесия

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla + \mathbf{f}_V = 0.$$

В результате получим следующее выражение:

$$\left[\frac{3K_0 - 2G}{3} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} + 2G \boldsymbol{\varepsilon} \right] \cdot \nabla + \mathbf{f}_V = 0.$$

С учетом преобразований

$$\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} \cdot \nabla = \boldsymbol{\varepsilon} \nabla = \nabla \cdot \mathbf{u} \nabla, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \nabla = (\nabla \mathbf{u})_S \cdot \nabla = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla + \Delta \mathbf{u})$$

это выражение приобретает вид

$$\frac{3K_0 - 2G}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \nabla + 2G \left(\frac{\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla}{2} + \frac{\Delta \mathbf{u}}{2} \right) + \mathbf{f}_V = 0.$$

Приведем подобные слагаемые

$$G \Delta \mathbf{u} + \frac{3K_0 + G}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \nabla + \mathbf{f}_V = 0.$$

И, вспомнив, что

$$3K_0 = \frac{E}{1 - 2\mu}, \quad E = 2G(1 + \mu),$$

получим *разрешающее уравнение теории упругости в перемещениях*:

$$G \Delta \mathbf{u} + \frac{G}{1 - 2\mu} \nabla \cdot \mathbf{u} \nabla + \mathbf{f}_V = 0. \quad (6.12)$$

Это выражение называют также *уравнением равновесия в форме Ламе*. Если объемные силы отсутствуют, то оно приобретает вид:

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1 - 2\mu} \nabla \cdot \mathbf{u} \nabla = 0.$$

Применяя к выражению (6.12) в случае равенства нулю или постоянства объемных сил операцию дивергенции, получим

$$G\left(\nabla \cdot \Delta \mathbf{u} + \frac{\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u} \nabla)}{1 - 2\mu}\right) + \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{f}_V}_{=0} = 0.$$

Упростив это выражение с помощью следующих преобразований:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \Delta \mathbf{u} &= \Delta \nabla \cdot \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u} \nabla) &= \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}) \nabla = \Delta \nabla \cdot \mathbf{u},\end{aligned}$$

получим следующее:

$$G\left(\Delta \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{1 - 2\mu} \Delta \nabla \cdot \mathbf{u}\right) = \frac{2G(1 - \mu)}{1 - 2\mu} \Delta \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Согласно постулату устойчивости Друкера, коэффициент Пуассона не может быть равен единице. Следовательно, это выражение может быть равно нулю только в одном случае, когда

$$\Delta \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Теперь, вспомнив, что

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \underset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}} = 3\varepsilon_0,$$

получим, что при равенстве нулю или постоянстве объемных сил средняя деформация является бигармонической функцией:

$$\Delta \varepsilon_0 = 0. \quad (6.13)$$

Применяя операцию двойного дифференцирования к уравнению равновесия в форме Ламе (6.10) при равенстве нулю или постоянстве объемных сил, можно показать следующее:

$$G\Delta\Delta\mathbf{u} + \frac{G}{1 - 2\mu} \underbrace{\Delta \nabla \cdot \mathbf{u} \nabla}_{=0} + \underbrace{\Delta \mathbf{f}_V}_{=0} = 0,$$

то есть при отсутствии поворота тела, как жесткого целого и при равенстве нулю или постоянстве объемных сил **функция перемещений является бигармонической**

$$\Delta\Delta\mathbf{u} = 0. \quad (6.14)$$

Пример №10. Определим объемные силы, действующие на тело, если известно поле перемещений его точек:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = x_1 x_2 \mathbf{e}_1 - x_1^2 \mathbf{e}_2 + (x_1 - x_3) \mathbf{e}_3.$$

Воспользуемся разрешающим уравнением теории упругости в перемещениях (6.12). С этой целью вычислим сначала градиент, а затем лапласиан заданного поля перемещений:

$$[\nabla \mathbf{u}] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 x_2 & -x_1^2 & (x_1 - x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 & -2x_1 & 1 \\ x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 \right) \cdot (x_2 \mathbf{e}_{11} - 2x_1 \mathbf{e}_{12} + \mathbf{e}_{13} + x_1 \mathbf{e}_{21} - \mathbf{e}_{33}) = -2 \mathbf{e}_2.$$

Затем вычислим дивергенцию градиента

$$\nabla \cdot \mathbf{u} \nabla = (x_2 - 1) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 \right) = \mathbf{e}_2.$$

Подставив полученные результаты в разрешающее уравнение (6.12), после преобразований получим:

$$\mathbf{f}_V = 2G \mathbf{e}_2 - \frac{G}{1 - 2\mu} \mathbf{e}_2 = \frac{G(1 - 4\mu)}{1 - 2\mu} \mathbf{e}_2.$$

6.11. Разрешающее уравнение теории упругости в напряжениях

Если в задаче заданы только силовые граничные условия

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_S,$$

а геометрические граничные условия отсутствуют, то для записи разрешающего уравнения теории упругости в качестве неизвестных удобно выбрать напряжения.

Для вывода уравнения теории упругости в напряжениях удобно использовать следующую форму записи условия совместности деформаций (6.7):

$$\nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} - \nabla \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \nabla - \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \nabla + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \nabla \nabla \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} = 0.$$

Подставим в это выражение деформации, выраженные из закона Гука в девятиаторах:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3K_0} \boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{I} + \frac{1}{2G} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{I}) = \left(\frac{1}{9K_0} - \frac{1}{6G} \right) \boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{I} + \frac{1}{2G} \boldsymbol{\sigma}.$$

Распишем каждое слагаемое условия совместности отдельно:

$$\begin{aligned}
\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} &= \nabla\nabla \cdot \left(\left(\frac{1}{9K_0} - \frac{1}{6G} \right) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I} + \frac{1}{2G} \boldsymbol{\sigma} \right) \mathbf{I} = \\
&= \left(\left(\frac{1}{9K_0} - \frac{1}{6G} \right) \Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2G} \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \mathbf{I}; \\
-\nabla \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \nabla &= -\nabla \left(\left(\frac{1}{9K_0} - \frac{1}{6G} \right) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I} + \frac{1}{2G} \boldsymbol{\sigma} \right) \cdot \nabla = \\
&= -\left(\frac{1}{9K_0} - \frac{1}{6G} \right) \nabla\nabla \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2G} \nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla; \\
-\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \nabla &= \\
= -\nabla \cdot \left(\left(\frac{1}{9K_0} - \frac{1}{6G} \right) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I} + \frac{1}{2G} \boldsymbol{\sigma} \right) \nabla &= -\left(\frac{1}{9K_0} - \frac{1}{6G} \right) \nabla\nabla \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2G} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \nabla. \\
\Delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \Delta \left(\left(\frac{1}{9K_0} - \frac{1}{6G} \right) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I} + \frac{1}{2G} \boldsymbol{\sigma} \right) = \left(\frac{1}{9K_0} - \frac{1}{6G} \right) \Delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I} + \frac{1}{2G} \Delta \boldsymbol{\sigma}; \\
\nabla\nabla \boldsymbol{\varepsilon} &= \nabla\nabla \left(\frac{1}{3K_0} \boldsymbol{\sigma} \right) = \frac{1}{3K_0} \nabla\nabla \boldsymbol{\sigma}; \\
-\Delta \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} &= -\Delta \left(\frac{1}{3K_0} \boldsymbol{\sigma} \right) \mathbf{I} = -\frac{1}{3K_0} \Delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I}.
\end{aligned}$$

После сложения полученных выражений, и после преобразований с учетом выражений, определяющих связь между константами упругости:

$$3K_0 = \frac{E}{1-2\mu}, \quad 2G = \frac{E}{1+\mu},$$

получим:

$$\left[\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{1+\mu} \Delta \boldsymbol{\sigma} \right] \mathbf{I} + \frac{1}{1+\mu} \nabla\nabla \boldsymbol{\sigma} - \nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \nabla + \Delta \boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (6.15)$$

Это выражение может быть упрощено: свернем его скалярно

$$\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1-\mu}{1+\mu} \Delta \boldsymbol{\sigma},$$

затем подставим результат в исходное выражение (6.15):

$$\frac{1-\mu}{1+\mu} \Delta \sigma I - \frac{1}{1+\mu} \Delta \sigma I + \frac{1}{1+\mu} \nabla \nabla \sigma - \underbrace{\nabla \sigma \cdot \nabla}_{-f_V} - \underbrace{\nabla \cdot \sigma \nabla}_{-f_V} + \Delta \sigma = 0$$

и приведем подобные слагаемые:

$$\Delta \sigma + \nabla f_V + f_V \nabla - \frac{\mu}{1+\mu} \Delta \sigma I + \frac{1}{1+\mu} \nabla \nabla \sigma = 0. \quad (6.16)$$

Теперь, скалярно свернув выражение (6.16), получим

$$\Delta \sigma = \frac{\mu+1}{\mu-1} \nabla \cdot f_V.$$

Подставим результат в выражение (6.16) и в результате получим *разрешающее уравнение теории упругости в напряжениях*, которое называют *уравнением Бельтрами-Митчелла*:

$$\Delta \sigma + \frac{1}{1+\mu} \nabla \nabla \sigma = \frac{\mu}{\mu-1} \nabla \cdot f_V I - \nabla f_V - f_V \nabla. \quad (6.17)$$

Это двухвалентное тензорное уравнение при отсутствии или постоянстве объемных сил имеет вид:

$$\Delta \sigma + \frac{1}{1+\mu} \nabla \nabla \sigma = 0. \quad (6.18)$$

Пример №11. Проверим, выполняется ли условие совместности деформаций в теле, если известно поле напряжений

$$\sigma(x) = x_1^2 \underset{11}{e e} + x_2^2 \underset{22}{e e} + x_3^2 \underset{33}{e e}$$

при отсутствии объемных сил. Воспользуемся разрешающим уравнением теории упругости в напряжениях (6.18). С этой целью вычислим сначала градиент, а затем лапласиан поля $\sigma(x)$:

$$\begin{aligned} \nabla \sigma &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \underset{1}{e} + \frac{\partial}{\partial x_2} \underset{2}{e} + \frac{\partial}{\partial x_3} \underset{3}{e} \right) (x_1^2 \underset{11}{e e} + x_2^2 \underset{22}{e e} + x_3^2 \underset{33}{e e}) = \\ &= 2x_1 \underset{111}{e e e} + 2x_2 \underset{222}{e e e} + 2x_3 \underset{333}{e e e}; \\ \Delta \sigma &= \nabla \cdot \nabla \sigma = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 \right) \cdot (2x_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + 2x_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + 2x_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) = \\
&= 2\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 = 2\mathbf{I},
\end{aligned}$$

а затем вычислим двойной градиент скалярной свертки:

$$\begin{aligned}
\nabla \nabla \sigma &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 \right) (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 \right) (2x_1 \mathbf{e}_1 + 2x_2 \mathbf{e}_2 + 2x_3 \mathbf{e}_3) = \\
&= 2\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 = 2\mathbf{I}.
\end{aligned}$$

Подставив результаты в выражение (6.18), получим, что равенство не выполняется:

$$2\mathbf{I} + \frac{l}{l+\mu} 2\mathbf{I} \neq \mathbf{0},$$

то есть условие совместности деформации при заданном тензоре напряжений и при отсутствии объемных сил не выполняется.

6.12. Функции напряжений и перемещений

Некоторые задачи теории упругости решают обратным методом: подбирают поля напряжений и перемещений, удовлетворяющие всем уравнениям теории упругости в точках какой-то области пространства, а затем находят граничные условия, определяя тем самым, каким внешним воздействиям это решение соответствует. Справедливость такого подхода гарантируется единственностью решения задачи теории упругости. При решении задач обратным методом используют специальные функции напряжений и перемещений.

В частности, если объемные силы отсутствуют, то дифференциальное уравнение равновесия и условие совместности деформаций (например, в напряжениях)

$$\nabla \cdot \sigma = \mathbf{0}, \quad \Delta \sigma + \frac{l}{l+\mu} \nabla \nabla \sigma = \mathbf{0},$$

тождественно выполняются, если поле напряжений представляет собой двойной градиент некоторой скалярной гармонической функции, которую называют *гармонической функцией напряжений*

$$\sigma = \nabla \nabla \Phi, \quad \Delta \Phi = 0. \quad (6.19)$$

Это несложно доказать:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla \cdot (\nabla \nabla \Phi) = \underbrace{\nabla \cdot \nabla \nabla \Phi}_{\Delta} = \nabla \underbrace{\Delta \Phi}_0 = \mathbf{0},$$

$$\Delta \nabla \nabla \Phi + \frac{1}{1+\mu} \nabla \nabla (\nabla \cdot \nabla \Phi) = \nabla \nabla \Delta \Phi + \frac{1}{1+\mu} \nabla \nabla (\Delta \Phi) = \mathbf{0}.$$

То есть, что при выборе функции напряжений в виде (6.19) все основные уравнения теории упругости выполняются.

Естественно, что условие (6.19) является достаточным, но не является необходимым: оно лишь выделяет некоторый ограниченный класс задач теории упругости. Этот класс задач имеет две важные особенности: во-первых, как уже было упомянуто выше, в задаче должны отсутствовать объемные силы, а во-вторых, поля напряжений и деформаций представляют собой поля девиаторов. Тот факт, что поле напряжений является девиационным, следует из равенства нулю скалярной свертки тензоров напряжений (с учетом выражения (6.19)):

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \nabla \cdot \nabla \Phi = \Delta \Phi = 0 \Rightarrow \underset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{3} \underset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{I} + \mathbf{S} = \mathbf{S}.$$

С использованием закона Гука в девиаторах можно показать, что, если поле напряжений является девиационным, то и поле деформаций также является девиационным:

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{3} \underset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{I} + \mathbf{e} = \frac{1}{9K_0} \underset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{I} + \mathbf{e} = \mathbf{e}.$$

Закон Гука при этом упрощается:

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2G} \underset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2G} \nabla \nabla \Phi. \quad (6.20)$$

Сравнивая уравнение Коши,

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\nabla \mathbf{u})_S.$$

с выражением (6.20), найдем поле перемещений:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2G} \nabla \Phi \quad (6.21)$$

с точностью до перемещения тела как жесткого целого. Действительно, если подставить поле $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ сначала в уравнение Коши, а потом использовать закон Гука, то получим поле напряжений

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G\boldsymbol{\varepsilon} = 2G\left[\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla)\right] = G\left[\nabla\frac{1}{2G}\nabla\Phi + \frac{1}{2G}\nabla\Phi\nabla\right] = \nabla\nabla\Phi,$$

выраженное через гармоническую функцию Φ , как в выражении (6.19).

Аналогичным образом можно использовать гармоническую функцию перемещений. Например, если поле смещений представить в виде ротора гармонической векторной функции

$$\mathbf{u} = \nabla \times \boldsymbol{\phi}, \quad \Delta\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0},$$

то, подставляя эти выражения в уравнение равновесия в форме Ламе

$$\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{1-2\mu}\nabla \cdot \mathbf{u}\nabla = \mathbf{0}$$

обнаружим, что оно тождественно выполняется:

$$\Delta(\nabla \times \boldsymbol{\phi}) + \frac{1}{1-2\mu}\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\phi})\nabla = \nabla \times \Delta\boldsymbol{\phi} + \frac{1}{1-2\mu}\nabla \times \Delta\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}.$$

Вспомним, что условие совместности деформаций, естественно, будет выполняться для любого поля перемещений (оно должно быть только дифференцируемым, то есть непрерывным):

$$\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla = \frac{1}{2}\nabla \times (\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla) \times \nabla = \mathbf{0}.$$

Таким образом, обнаружили, что и в этом случае все основные уравнения теории упругости выполняются.

Кроме перечисленных, существуют и другие, более сложные варианты функций для представления полей напряжений и перемещений. Возможности использования подобных решений значительно расширяются, если использовать принцип суперпозиции.

6.13. Контрольные вопросы для закрепления материала

Вопросы для закрепления материала

- Каковы основные гипотезы, принятые в теории неоднородного напряженно-деформированного состояния?
- Как записывают дифференциальное уравнение равновесия в тензорной и координатной и матричной форме?
- Откуда следует симметрия тензоров напряжений при неоднородном напряженно-деформированном состоянии?
- Каким образом записывают граничные условия для упругого нагруженного тела? Какие бывают виды граничных условий?
- Как формулируется уравнение Коши?

- Какой физический смысл имеет скалярная свертка градиента поля перемещений?
- Какие деформации тела называют совместными?
- Как из уравнения Коши получить условие совместности деформаций?
- Какова полная система уравнений теории упругости?
- Что представляет собой поле возможных перемещений точек тела?
- Какова связь между полями возможных и действительных перемещений?
- В чем состоит принцип возможных перемещений?
- Как формулируют закон сохранения энергии при неоднородном напряженно-деформированном состоянии?
- В чем состоит принцип устойчивости при неоднородном напряженно-деформированном состоянии?
- Какие ограничения накладывает принцип устойчивости на величины констант упругости?
- В чем состоит однозначность решения задач теории упругости?
- Какие виды симметрии вы знаете?
- Какие конструкции называют симметричными?
- Что такое симметричное (кососимметричное) нагружение?
- В чем состоят законы прямой и косой симметрии для линейно-упругого материала?
- Как формулируют разрешающее уравнение теории упругости в перемещениях (уравнение равновесия в форме Ламе)?
- Каким свойством обладает функция перемещений при отсутствии поворота тела, как жесткого целого и при равенстве нулю или постоянстве объемных сил?
- Как формулируют разрешающее уравнение теории упругости в напряжениях (уравнение Бельтрами-Митчела)?
- Что представляет собой гармоническая функция напряжений?
- Каковы ограничения на класс задач, решаемых с помощью гармонической функции напряжений?
- Как записывается закон Гука для задач, решаемых с помощью гармонической функции напряжений? Что в этом случае представляет собой поле перемещений?

Задачи для самостоятельного решения

- В теле реализовано следующее напряженное состояние при отсутствии объемных сил:

$$\sigma_{11} = 2x_1 + x_2, \quad \sigma_{22} = x_1 + 4x_2^2 - x_3.$$

Установить, находится ли тело в равновесии.

- При каких объемных силах в теле действуют напряжения, заданные матрицей

$$[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})] = - \begin{bmatrix} 2x_1^2 + x_2 & -6x_1x_2^2 & 0 \\ -6x_1x_2^2 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_1x_3^2 \end{bmatrix}.$$

- Цилиндрический стержень круглого поперечного сечения испытывает напряжения, заданные в декартовой системе координат:

$$\sigma_z = A, \tau_{xy} = -By, \tau_{zy} = Cx, \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0.$$

Как нагружен стержень на торцах и на боковой поверхности, если z – это ось стержня?

- Найти дисторсию, если известно поле перемещений

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (x_1 + 2x_2 + x_3)\mathbf{e}_1 + (x_1 - 6x_2)\mathbf{e}_2 + (x_1 - 4x_3)\mathbf{e}_3.$$

- Для заданного поля перемещений:

$$u_1 = 4x_1 - x_2 + 3x_3, u_2 = x_1 + 7x_2, u_3 = -3x_1 + 4x_2 + 4x_3$$

определить тензор деформаций и доказать, что найденные деформации совместны.

- Определить относительное изменение объема в начале координат тела, если известно поле смещений:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (4x_1 - 2x_2^2 + 3x_3)\mathbf{e}_1 + (6x_2 - 8)\mathbf{e}_2 + (4x_3^2 + 2)\mathbf{e}_3.$$

- Доказать, что выражение

$$\nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} - (\nabla \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \nabla + \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \nabla) + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \nabla \nabla \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

является условием совместности деформаций.

- Определить число видов симметрии тетраэдра.
- В теле реализовано следующее напряженное состояние при отсутствии объемных сил:

$$\sigma_{11} = 5, \sigma_{22} = -8x.$$

Установить, являются ли деформации совместными.

- Проверить, выполняется ли условие совместности деформаций в теле, если известно поле напряжений

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2^2)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - (x_2 + 2x_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - (x_2 + 2x_1)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + 4x_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$$

при отсутствии объемных сил.

- Механизм, изображенный на рис.6.13 нагружен сосредоточенной силой F , а также парой сил с моментом M . Определить с помощью принципа возможных перемещений, какова должна быть связь между нагрузками F и M , чтобы механизм находился в равновесии.

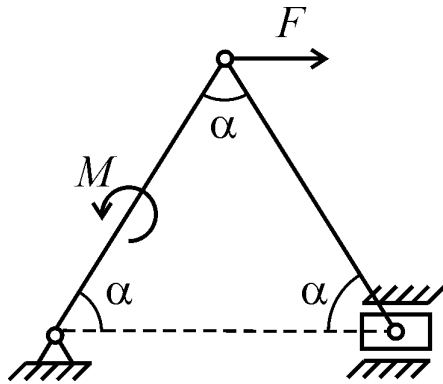


Рис.6.13. Механизм

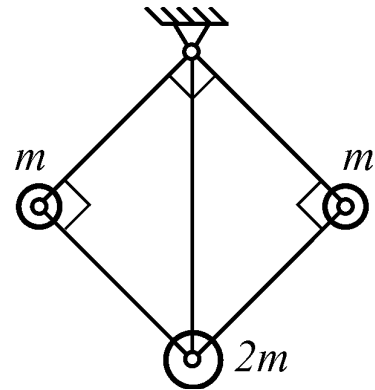


Рис.6.14. Плоская конструкция

- Конструкция, состоящая из пяти невесомых стержней (рис.6.14), нагружена силами тяжести грузов. Определить с помощью принципа возможных перемещений усилие в среднем стержне.
- С помощью принципа возможных перемещений найти условие совместности деформаций для плоской квадратной рамы, состоящей из шести стержней одинакового поперечного сечения (рис.6.15). В решении использовать симметрию конструкции.
- Дано плоское линейно-упругое тело (рис.6.16) неограниченного размера с круглым отверстием в начале координат, нагруженное распределенной силой постоянной интенсивностью q . С использованием законов симметрии определить напряженное состояние в точках, находящихся на расстоянии r от центра отверстия.

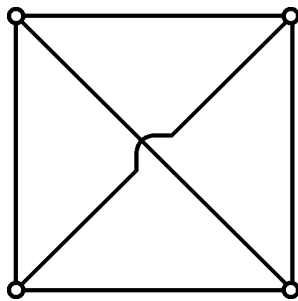


Рис.6.15. Плоская рама

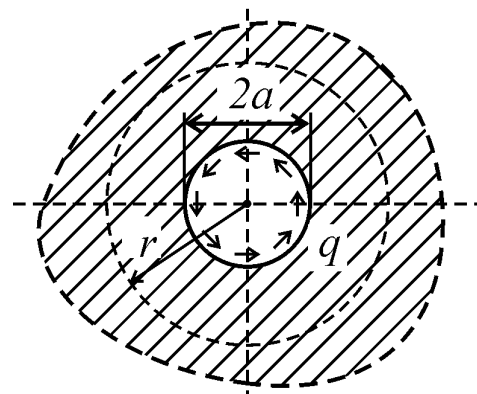


Рис.6.16. Бесконечное тело с круглым отверстием