5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ В ТЕНЗОРНОМ ПОЛЕ

В некоторых приложениях тензорного анализа иногда возникает необходимость в вычислении интегралов тензорных полей по линии, поверхности или по объему. В этой главе рассмотрим особенности такого интегрирования, а также некоторые интегральные теоремы.

5.1. Интегрирование по линии

Пусть на плоскости задано скалярное поле $\lambda(\boldsymbol{x})$, как показано на рис.5.1, причем значения функции отложены ортогонально плоскости аргументов. Рассмотрим изменение заданной функции в области аргументов $\boldsymbol{x}$, определяющих участок $\boldsymbol{AB}$ некоторой линии.

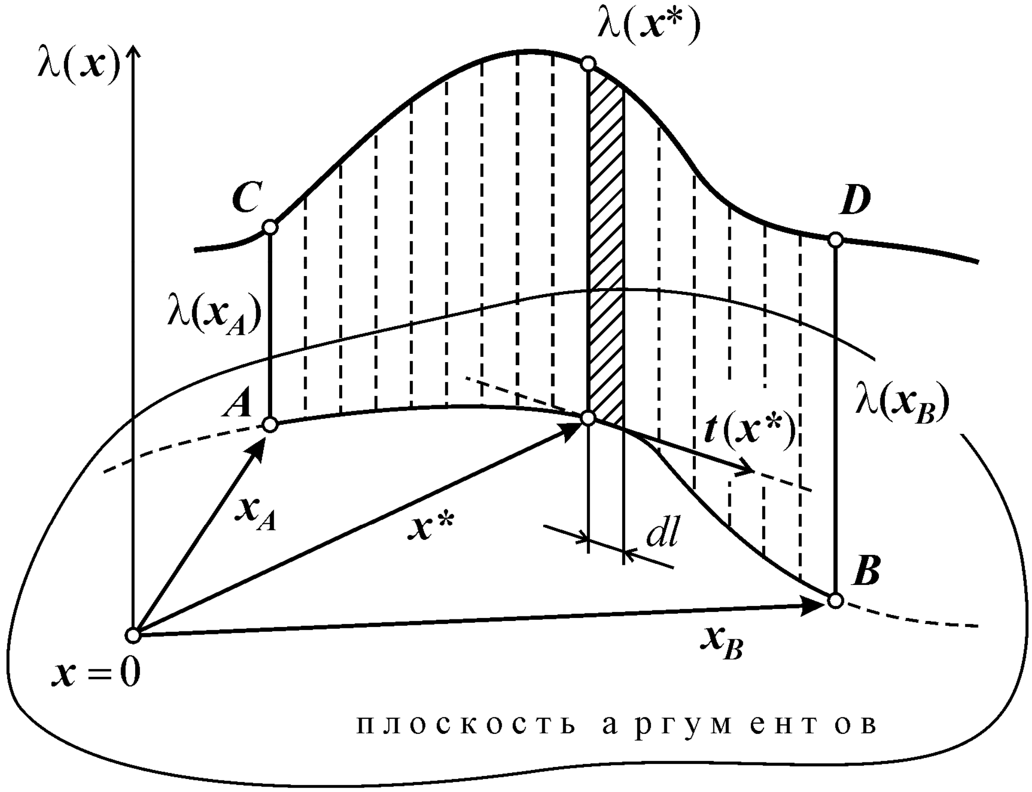


Рис.5.1. Изменение функции $\lambda(\boldsymbol{x})$ *вдоль линии* $\boldsymbol{AB}$

Разобьем линию $\boldsymbol{AB}$ на множество элементарных отрезков длиной dl и для точки кривой, определяемой радиус-вектором $\boldsymbol{x}^*$, вычислим тензорное произведение

$$\lambda(\boldsymbol{x}^*) * dl\,.$$

Результат этого произведения представляет собой площадь прямоугольника со сторонами $\lambda(\boldsymbol{x}^*)$ и dl. При бесконечно малых элементах dl эта площадь практически неотличима от площади фигуры, заштрихованной на рис.5.1. Просуммировав такие произведения по всем отрезкам dl, на которые разбита линия $\boldsymbol{AB}$, получим тензор той же валентности, что и интегрируемое поле (в данном случае это будет число)

$$\mu = \int_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{B}} \lambda(\boldsymbol{x})\, dl$$

который называют **интегралом** функции $\lambda(\boldsymbol{x})$ по линии $\boldsymbol{AB}$ (линейный интеграл). Точки $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ определяют пределы интегрирования ($\boldsymbol{A}$ – нижний предел, $\boldsymbol{B}$ – верхний), dl – это дифференциал аргумента. Число μ представляет собой сумму тензоров λ на линии $\boldsymbol{AB}$, равную площади криволинейной фигуры $\boldsymbol{ACDB}$.

В случае, когда интегрируемое тензорное поле имеет произвольную валентность, линейный интеграл вычисляют аналогично:

$$\boldsymbol{S} = \int_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\, dl.$$

При этом (как и в случае скалярного поля) фактически производят суммирование значений тензорного поля $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ вдоль линии $\boldsymbol{AB}$. Полученный тензор $\boldsymbol{S}$, если его разделить на длину линии $\boldsymbol{AB}$, представляет собой среднее значение по всем тензорам $\boldsymbol{T}$, определенным на линии $\boldsymbol{AB}$.

В соответствии с правилами сложения тензоров, если известны координаты тензора (для примера рассмотрим двухвалентный тензор) в некотором общем для всех точек поля базисе, то координаты интеграла вычисляются обычным интегрированием

$$S_{ij} = \int_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{B}} T_{ij}\; dl.$$

Иногда возникает необходимость в вычислении интегралов от произведений

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) * \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}) \text{ или } \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}), \tag{5.1}$$

где $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})$ – это единичный вектор, направленный по касательной к линии $\boldsymbol{AB}$ в сторону возрастания пути, пройденного по линии от точки $\boldsymbol{A}$ к точке $\boldsymbol{B}$. В этом случае вводят понятие векторного дифференциала

$$\boldsymbol{dl} \equiv \boldsymbol{t} dl. \tag{5.2}$$

Это позволяет записывать интегралы тензорных функций более компактно

$$\boldsymbol{M} = \int_A^B \boldsymbol{T} * \boldsymbol{dl},\ \boldsymbol{L} = \int_A^B \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{dl},\ \boldsymbol{K} = \int_A^B \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{dl}.$$

В этих выражениях дифференциал аргумента находится справа от подынтегральной функции, поэтому его называют правым (как и в случае тензорного дифференцирования). Однако при записи интегральных выражений, в которых дифференциал находится слева для обозначения подынтегрального выражения необходимо ставить скобки

$$\boldsymbol{M}'=\int_A^B(d\boldsymbol{l}*\boldsymbol{T}),\ \boldsymbol{L}'=\int_A^B(d\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{T}),\ \boldsymbol{K}'=\int_A^B(d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{T}), \tag{5.3}$$

указывая, таким образом, какую именно функцию следует интегрировать. В противном случае возникает неопределенность, так как традиционно в математическом анализе интегрируемую функцию записывают между значком интеграла и дифференциалом аргумента. Однако в тензорном анализе далеко не всегда есть возможность поменять местами множители в произведении, что обусловлено необходимостью соблюдения порядка следования векторов в тензорном выражении, и в общем случае интегралы с левым и правым дифференциалам не равны между собой. Поэтому для записи тензорных интегралов с левым дифференциалом надо либо ставить скобки как в выражениях (5.3), либо переписывать эти выражения с учетом (5.2) следующим образом:

$$\boldsymbol{M}'=\int_A^B\boldsymbol{t}*\boldsymbol{T}dl,\ \boldsymbol{L}'=\int_A^B\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{T}dl,\ \boldsymbol{K}'=\int_A^B\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{T}dl.$$

Скалярный дифференциал dl всегда следует записывать справа от подынтегрального выражения.

Интеграл тензорной функции по линии $\boldsymbol{AB}$ со скалярным произведением на векторный дифференциал

$$\boldsymbol{L}=\int_A^B\boldsymbol{T}\cdot d\boldsymbol{l}$$

имеет в механике особый смысл, и его называют ***течением*** вдоль линии. Название происходит от поля скоростей $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ несжимаемой жидкости: если ее мгновенно заморозить везде, кроме тонкой трубки вдоль линии $\boldsymbol{AB}$, то за счет кинетической энергии жидкость будет продолжать течь вдоль трубки со скоростью, равной течению, деленному на длину трубки. В случае, когда линия $\boldsymbol{AB}$ замкнута, течение по этой линии называют **циркуляцией** (в связи с той же аналогией):

$$\boldsymbol{L}=\oint\boldsymbol{T}\cdot d\boldsymbol{l}.$$

Если тензорное поле потенциально

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})=\psi(\boldsymbol{x})\nabla,$$

то течение тензора $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ вдоль линии AB представляет собой разность потенциалов в начале и в конце пути, что является следствием выражения (4.8) с учетом равенства векторов $d\boldsymbol{x}$ и $d\boldsymbol{l}$:

$$\int_A^B (\boldsymbol{\psi}\nabla)\cdot d\boldsymbol{l} = \int_A^B d\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{A}}, \tag{5.4}$$

следовательно, циркуляция в потенциальном поле всегда равна нулю:

$$\oint (\boldsymbol{\psi}\nabla)\cdot d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{0}.$$

И, напротив, если интегрирование по любому замкнутому контуру дает ноль, то такое поле потенциально:

$$\oint \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{T} = \boldsymbol{\psi}\nabla.$$

Заметим, что выражение (5.4) является обобщением на множество тензорных функций формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_A^B y(x)dx = F(B) - F(A),$$

где $y(x)$ – скалярная функция, а $F(B)$ и $F(A)$ – значения ее первообразной при аргументах $x = B$ и $x = A$ соответственно.

Пример №1. Найти работу сил в постоянном векторном поле (рис.5.2)

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{t}$$

по перемещению точки по криволинейной траектории $\boldsymbol{BC}$, если λ – это число, а $\boldsymbol{t}$ – постоянный вектор.

Работа сил $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ представляет собой течение вдоль криволинейной траектории $\boldsymbol{BC}$:

$$A = \int_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{l}.$$

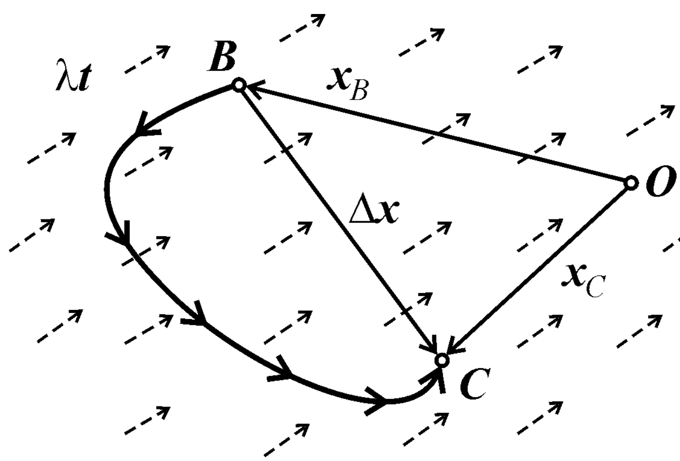


Рис.5.2. Перемещение точки в силовом поле

Отметим, что заданное силовое поле потенциально, так как существует другое поле

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{t},$$

градиент которого равен заданному полю. Покажем это:

$$\nabla\psi(\boldsymbol{x}) = \nabla(\lambda\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{t}) = \lambda\nabla\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{t} = \lambda\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{t} = \lambda\boldsymbol{t} \equiv \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}).$$

С учетом потенциальности заданного поля работу сил по перемещению точки вдоль траектории $\boldsymbol{BC}$ вычислим следующим образом:

$$A = \int_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{C}} \nabla\psi(\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{C}} d\psi = \psi_{\boldsymbol{C}} - \psi_{\boldsymbol{B}} =$$

$$= \lambda\, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{C}}\cdot\boldsymbol{t} - \lambda\, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}\cdot\boldsymbol{t} = \lambda\,(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{C}} - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}})\cdot\boldsymbol{t} = \lambda\,\Delta\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{t},$$

то есть для потенциального поля работа не зависит от пути:

$$A = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\cdot\Delta\boldsymbol{x},$$

а зависит только от начального и конечного положения точки.

5.2. Интегрирование по поверхности и по объему

Поверхностные интегралы – это интегралы, взятые по такой области аргументов тензорного поля, которая представляет собой некоторую поверхность площадью S, ее называют областью или поверхностью интегрирования (рис.5.3). При поверхностном интегрировании тензорных полей вводят понятие вектора – элемента поверхности

$$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}dS,$$

модуль которого представляет площадь элемента dS, а направление – нормаль к поверхности в данной точке. Из двух направлений нормали выбирается одно (одну сторону поверхности называют внутренней, другую – наружной), и нормаль $\boldsymbol{n}$ должна быть направлена по одну сторону по всей поверхности.

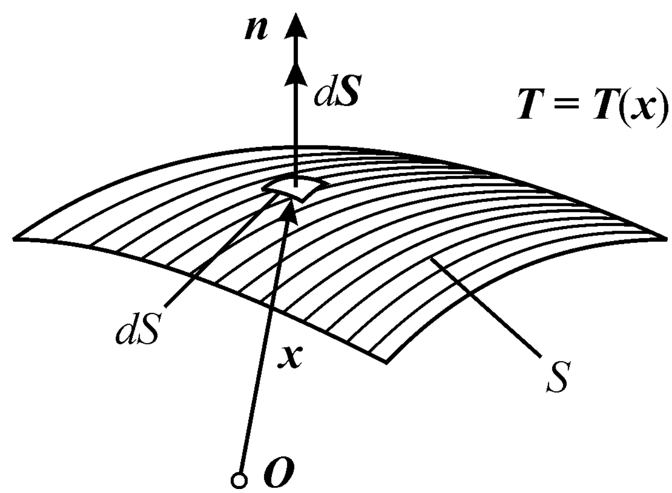


Рис.5.3. Интегрирование по поверхности

Тензорное поле $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ по заданной поверхности можно проинтегрировать теми же способами, что и по линии. При интегрировании со скалярным дифференциалом

$$\boldsymbol{N} = \int_S \boldsymbol{T}dS$$

интеграл имеет ту же валентность, что и подынтегральная функция и представляет собой тензор, равный сумме всех тензоров в точках поверхности интегрирования. Если $\boldsymbol{N}$ разделить на площадь S, то получим среднее значение по всем тензорам на поверхности интегрирования.

При интегрировании с векторным дифференциалом возможно три варианта интегрирования (как и при интегрировании по линии) – с тензорным, скалярным и векторным произведением:

$$\boldsymbol{M} = \int_S \boldsymbol{T} d\boldsymbol{S}, \quad \boldsymbol{K} = \int_S \boldsymbol{T} \cdot d\boldsymbol{S}, \quad \boldsymbol{L} = \int_S \boldsymbol{T} \times d\boldsymbol{S}.$$

Интегралы с правым и левым дифференциалом $d\boldsymbol{S}$ в общем случае неравны друг другу (из-за необходимости соблюдать порядок расположения векторов в тензорных выражениях)

$$\boldsymbol{M} = \int_S \boldsymbol{T} \otimes d\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{n}\, dS, \ \boldsymbol{M}' = \int_S (d\boldsymbol{S} \otimes \boldsymbol{T}) = \int_S \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{T} dS, \ \boldsymbol{M} \neq \boldsymbol{M}',$$

здесь знак $\otimes$ обозначает любое произведение – тензорное векторное или скалярное.

Объемные интегралы – это интегралы, взятые по такой области аргументов тензорного поля, которая представляет собой некоторую область пространства объемом V, эту область называют областью интегрирования (рис.5.5).

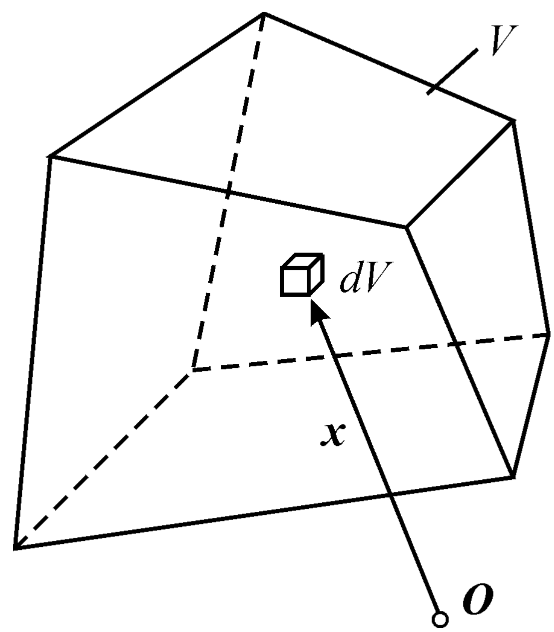


Рис.5.5. Интегрирование по объему

При интегрировании по объему невозможно ввести понятие векторного дифференциала, поэтому тензорное поле $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ можно проинтегрировать по объему V единственным способом:

$$\boldsymbol{N} = \int_V \boldsymbol{T} dV.$$

Здесь интеграл $\boldsymbol{N}$ – это тензор той же валентности, что интегрируемое поле $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$. Результат интегрирования по объему представляет собой сумму всех тензоров в точках области интегрирования. Если $\boldsymbol{N}$ разделить на объем V, то получим среднее значение по всем тензорам в области интегрирования.

Пример №2. В пространстве имеется тело объемом V и поверхностью S. На тело действуют силы, распределенные по поверхности $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ и силы, распределенные по объему $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$. Определить главный вектор всех сил, действующих на это тело и их главный момент относительно начала координат и относительно какого-то центра A.

На каждый элемент поверхности dS действует сила $d\boldsymbol{f}_S$, а на каждый объема dV действует сила $d\boldsymbol{f}_V$:

$$d\boldsymbol{f}_S = \boldsymbol{p}dS,\ d\boldsymbol{f}_V = \boldsymbol{q}dV.$$

Главный вектор – это сумма всех сил, приложенных к телу:

$$\boldsymbol{R} = \oint_S d\boldsymbol{F}_S + \int_V d\boldsymbol{F}_V = \oint_S \boldsymbol{p}dS + \int_V \boldsymbol{q}dV.$$

В этом выражении первый интеграл – это главный вектор поверхностных сил, а второй – объемных.

Вспомним из курса теоретической механики, что моментом силы относительно какого-либо центра называется вектор, равный векторному произведению вектора, проведенного из упомянутого центра в точку приложения силы, на саму силу, то есть относительно начала координат главный момент – это вектор, равный векторному произведению радиус-вектора точки приложения силы на саму силу:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{F}.$$

Отсюда главный момент относительно начала координат

$$\boldsymbol{M}_O = \oint_S \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}\, dS + \int_V \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{q}\, dV.$$

Главный момент относительно центра A

$$\boldsymbol{M}_A = \oint_S (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_A) \times \boldsymbol{p}\, dS + \int_V (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_A) \times \boldsymbol{q}\, dV =$$

$$= \oint_S \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}\, dS + \int_V \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{q}\, dV - \oint_S \boldsymbol{x}_A \times \boldsymbol{p}\, dS - \int_V \boldsymbol{x}_A \times \boldsymbol{q}\, dV =$$

$$= \boldsymbol{M}_O - \boldsymbol{x}_A \times \left(\oint_S \boldsymbol{p}\, dS - \int_V \boldsymbol{q}\, dV\right) = \boldsymbol{M}_O - \boldsymbol{x}_A \times \boldsymbol{R},$$

то есть при смене центра приведения момента происходит изменение главного момента на величину момента главного вектора.

5.4. Теорема Остроградского – Гаусса

Интегрирование любой потенциальной функции по объему можно свести к интегрированию потенциала этой функции по площади поверхности, ограничивающей этот объем.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим потенциальное тензорное поле произвольной валентности

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\nabla.$$

Вычислим интеграл от этого поля по объему V, ограничивающему некое тело, и спроецируем этот интеграл на единичный вектор $\boldsymbol{t}$:

$$\int\limits_V \boldsymbol{R} dV \cdot \boldsymbol{t} = \int\limits_V (\boldsymbol{T}\nabla) dV \cdot \boldsymbol{t} \equiv \boldsymbol{W} . \tag{5.5}$$

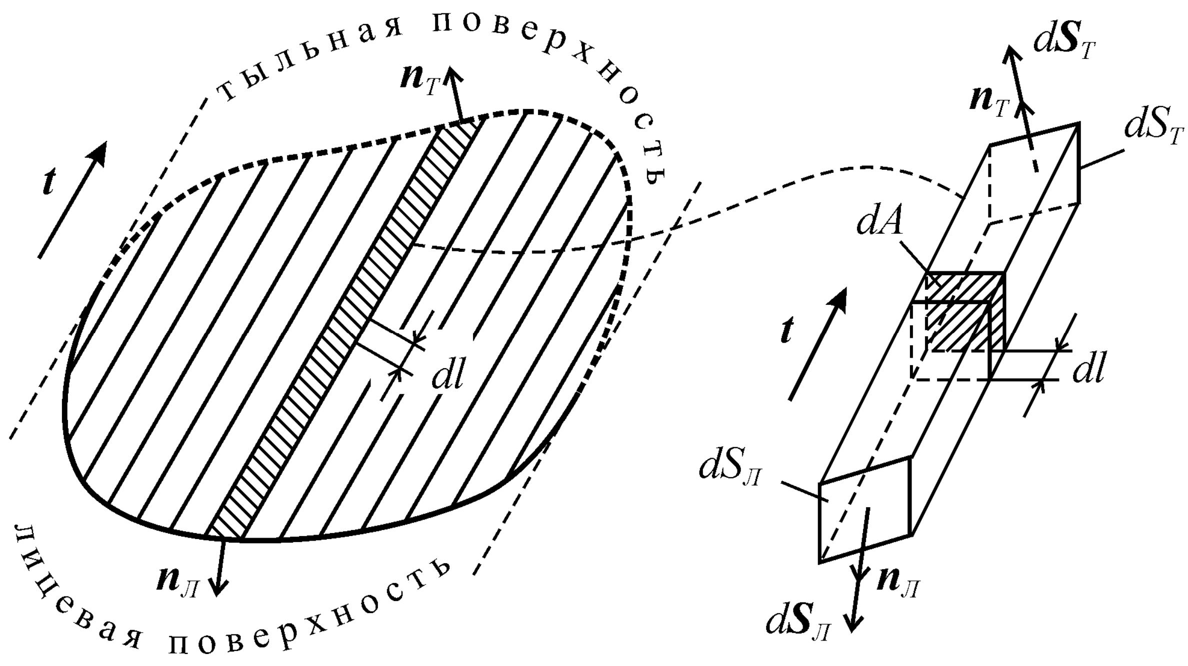
Разобьем рассматриваемое тело на множество элементарных стержней, параллельных заданному вектору $\boldsymbol{t}$. На рис.5.6.а показано сечение этого тела, параллельное вектору $\boldsymbol{t}$ (и, естественно, осям стержней), а на рис.5.6.б изображен один из элементарных стержней. Обозначим видимую поверхность тела, если смотреть на него в сторону вектора $\boldsymbol{t}$ лицевой поверхностью, а оставшуюся часть – тыльной. Площадь лицевой поверхности будем обозначать $S_Л$, а площадь тыльной поверхности S_T. Естественно, сумма этих площадей даст общую площадь, ограничивающую рассматриваемое тело:

$$S_Л + S_T \equiv S .$$

Элементарный объем тела можно представить как произведение площади поперечного сечения каждого элементарного стержня dA и элемента его длины dl:

$$dV = dl * dA .$$

Теперь перепишем выражение (5.5) следующим образом (с учетом того, что вектор $\boldsymbol{t}$ – это постоянный вектор, внесем его под знак интеграла):



а) сечение тела, разбитого на элементарные стержни

б) элементарный стержень

Рис.5.6

$$\boldsymbol{W} = \int_V \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{t}\, dV = \int_A \int_l \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{t}\, dl\, dA. \qquad (5.6)$$

Заметим, что интеграл от рассматриваемой функции по длине элементарного стержня l представляет собой течение заданного потенциального поля и равно разности потенциалов:

$$\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{t} dl \equiv \int_{\boldsymbol{l}} (\boldsymbol{T}\nabla) \cdot d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{T}_T - \boldsymbol{T}_Л,$$

где $\boldsymbol{T}_Л$ – это значение тензорного поля на лицевой поверхности стержня, а $\boldsymbol{T}_T$ – на тыльной поверхности. С учетом последнего равенства выражение (5.6) приобретает вид:

$$\boldsymbol{W} = \int_A (\boldsymbol{T}_T - \boldsymbol{T}_Л) dA = \int_A \boldsymbol{T}_T dA - \int_A \boldsymbol{T}_Л dA. \qquad (5.7)$$

Рассмотрим отдельно один из элементарных стержней (см. рис.5.6б). Площадь его поперечного сечения можно записать двумя способами:

$$dA = -d\boldsymbol{S}_Л \cdot \boldsymbol{t} \quad \text{и} \quad dA = d\boldsymbol{S}_T \cdot \boldsymbol{t} \qquad (5.8)$$

где

$$d\boldsymbol{S}_T = dS_T \boldsymbol{n}_T, \; d\boldsymbol{S}_Л = dS_Л \boldsymbol{n}_Л.$$

Здесь dS_T и – $dS_Л$ элементарные площади соответственно тыльной и лицевой поверхностей тела, а $\boldsymbol{n}_T$ и $\boldsymbol{n}_Л$ – единичные нормали к этим поверхностям. Подставив теперь выражения (5.8) в (5.7), получим:

$$\boldsymbol{W} = \int_A \boldsymbol{T}_T dA - \int_A \boldsymbol{T}_Л dA = \int_{S_T} \boldsymbol{T}_T d\boldsymbol{S}_T \cdot \boldsymbol{t} + \int_{S_Л} \boldsymbol{T}_Л d\boldsymbol{S}_Л \cdot \boldsymbol{t} =$$

$$= \left(\int_{S_T} \boldsymbol{T}_T d\boldsymbol{S}_T + \int_{S_Л} \boldsymbol{T}_Л d\boldsymbol{S}_Л \right) \cdot \boldsymbol{t} = \oint_S \boldsymbol{T} d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{t}.$$

Теперь, сравнивая полученный результат с выражением (5.5), можно записать:

$$\int_V (\boldsymbol{T}\nabla) dV \cdot \boldsymbol{t} = \oint_S \boldsymbol{T} d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{t}.$$

Отсюда следует выражение, позволяющее свести интегрирование потенциальной функции по объему к интегрированию ее потенциала по площади поверхности, ограничивающей этот объем:

$$\int_V (\boldsymbol{T}\nabla)\, dV = \oint_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{T} d\boldsymbol{S}.$$

Свернув полученное выражение скалярно или векторно по последним двум векторам, получим ***общий вид формулы Остроградского – Гаусса*:**

$$\int_V (\boldsymbol{T} \otimes \nabla)\, dV = \oint_S \boldsymbol{T} \otimes d\boldsymbol{S}\,. \tag{5.9}$$

Иногда это выражение называют ***теоремой Остроградского – Гаусса***. Здесь символ $\otimes$, как и раньше, означает любой вид произведения, при этом производные в выражении (5.9) должны существовать.

Наиболее часто в литературе употребляется вариант теоремы Остроградского-Гаусса со скалярным произведением

$$\int_V \boldsymbol{T} \cdot \nabla dV = \oint_S \boldsymbol{T} \cdot d\boldsymbol{S}\,,$$

формулируется она следующим образом: *интеграл дивергенции поля по некоторой области пространства равен потоку поля через границу этой области*.

Пример №3. Упростить выражение

$$\int_V \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{T} \cdot \nabla dV - \oint_S \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} dS\,,$$

если $\boldsymbol{T}$ – двухвалентное тензорное поле, заданное на области аргументов, объем которой равен V и которая ограничена поверхностью площадью S.

Применим теорему Остроградского – Гаусса ко второму интегралу

$$\oint_S \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_V (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{T}) \cdot \nabla dV\,.$$

Подставив результат в предыдущее выражение, получим

$$\int_V [\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{T} \cdot \nabla - (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{T}) \cdot \nabla] dV =$$

$$= \int_V \left[\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{T} \cdot \nabla - \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{T} \cdot \nabla - \underset{\otimes}{\underline{\boldsymbol{x} \nabla \cdot \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}}} \right] dV =$$

$$= -\int_V \underset{\otimes}{\underline{\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}}}\, dV = \int_V \underset{\otimes}{\boldsymbol{T}}\, dV\,.$$

Пример №4. В некоторой области пространства объемом V, которая ограниченна поверхностью площадью S, задано двухвалентное тензорное поле

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}) - \nabla \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}$$

Найти среднее значение по объему этого поля, если известно, что

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T} = \boldsymbol{p}\text{, а } \nabla \cdot \boldsymbol{T} = -\boldsymbol{q}\,.$$

Среднее значение тензорного поля вычисляется следующим образом

$$\boldsymbol{T}_{cp}=\frac{1}{V}\int_V \boldsymbol{T}dV=\frac{1}{V}\left[\int_V \nabla\cdot(\boldsymbol{T}\boldsymbol{x})dV-\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}dV\right].$$

Применив к первому интегралу формулу Остроградского – Гаусса, получим

$$\boldsymbol{T}_{cp}=\frac{1}{V}\left[\oint_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}dS-\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}dV\right].$$

С учетом исходных данных можно записать следующее

$$\boldsymbol{T}_{cp}=\frac{1}{V}\left[\oint_S \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}dS+\int_V \boldsymbol{q}\boldsymbol{x}dV\right]=\frac{1}{V}\left[\oint_S (d\boldsymbol{p}*\boldsymbol{x})+\int_V (d\boldsymbol{q}*\boldsymbol{x})\right].$$

Далее это выражение не упрощается: вектор $\boldsymbol{x}$ нельзя выносить за знаки интегралов, так как в первом интеграле векторы $\boldsymbol{x}$ определяют точки на поверхности, ограничивающей заданный объем, а во втором интеграле – точки внутри этой поверхности.

5.5. Теорема Стокса

Интегрирование любой потенциальной функции по некоторой поверхности можно свести к интегрированию потенциала этой функции по контуру этой поверхности.

Выражение, переводящее интеграл по некоторой поверхности, ограниченной замкнутой кривой, в интеграл по этой кривой, можно получить тем же способом, что и формулу Остроградского-Гаусса. Однако это можно сделать проще, если использовать уже выведенную ранее формулу Остроградского – Гаусса (5.9) с тензорным произведением. Для этого рассмотрим оболочку, толщина которой δ стремится к нулю (рис.5.7).

Обозначим индексами «B», «H» и «$Б$» соответственно верхнюю, нижнюю и боковую (ее площадь стремиться к нулю) поверхности, ограничивающие рассматриваемую оболочку. Пусть объем оболочки бесконечно мал и равен V, тогда каждому элементу на верхней поверхности соответствует точно такой же элемент на нижней поверхности оболочки, в пространстве эти элементы практически совпадают

$$\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{x}_H\equiv\boldsymbol{x},\ dS_B=dS_H, \tag{5.10}$$

отсюда следует равенство площадей верхней и нижней поверхностей, а также длин их контуров

$$S_B=S_H\equiv S,\ l_B=l_H\equiv l.$$

В соответствии с введенными обозначениями, формула Остроградского – Гаусса (с тензорным произведением) приобретает вид:

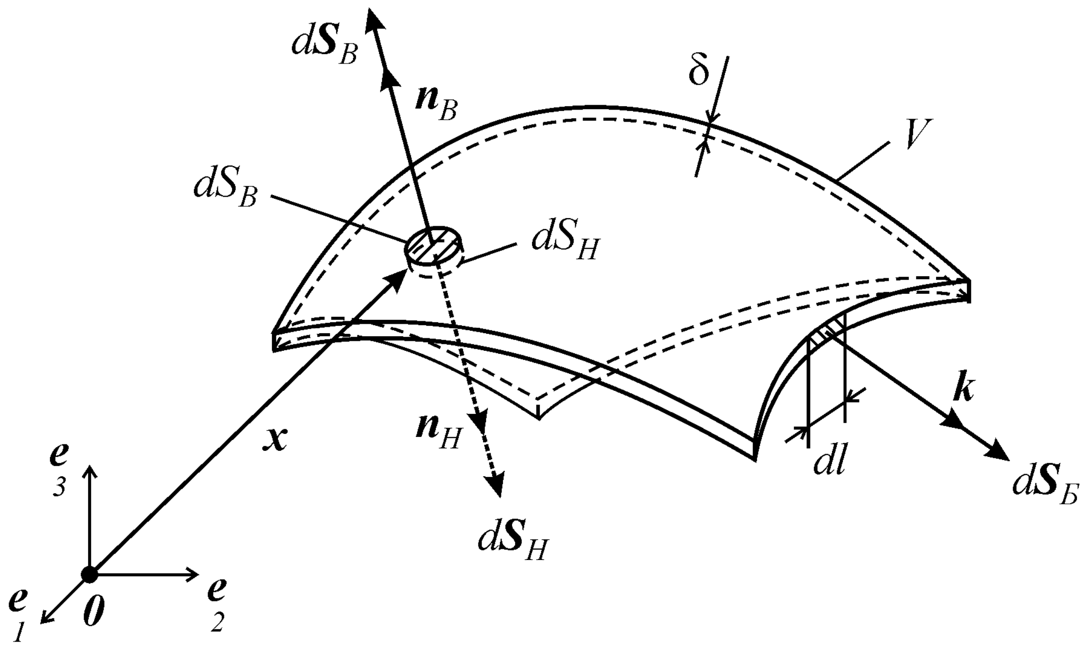


Рис.5.7. Область интегрирования в виде бесконечно тонкой оболочки

$$\int_V \boldsymbol{T}\nabla dV = \int_{S_B} \boldsymbol{T} d\boldsymbol{S}_B + \int_{S_H} \boldsymbol{T} d\boldsymbol{S}_H + \int_{S_Б} \boldsymbol{T} d\boldsymbol{S}_Б . \tag{5.11}$$

Очевидно, что векторы внешних нормалей к соответствующим элементам верхней и нижней поверхностей противоположны $\boldsymbol{n}_B = -\boldsymbol{n}_H$, это обуславливает противоположность элементарных векторов поверхностей

$$d\boldsymbol{S}_B = -d\boldsymbol{S}_H . \tag{5.12}$$

Тензоры $\boldsymbol{T}$ в точках, соответствующих элементам dS_B и dS_H, можно считать одинаковыми (следствие первого выражения (5.10)):

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}_B) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}_H) \equiv \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) . \tag{5.13}$$

В соответствии с (5.12) и (5.13) первые два слагаемых в правой части выражения (5.11) в сумме дают ноль

$$\int_{S_B} \boldsymbol{T} d\boldsymbol{S}_B + \int_{S_H} \boldsymbol{T} d\boldsymbol{S}_H = \boldsymbol{0} . \tag{5.14}$$

Выразим дифференциалы dV и $d\boldsymbol{S}_Б$ через толщину оболочки δ:

$$dV = \delta\, dS , \qquad d\boldsymbol{S}_Б = \delta\, dl\, \boldsymbol{k} \equiv \delta\, d\boldsymbol{L} . \tag{5.15}$$

В последнем выражении векторный дифференциал

$$d\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{k}\ dl$$

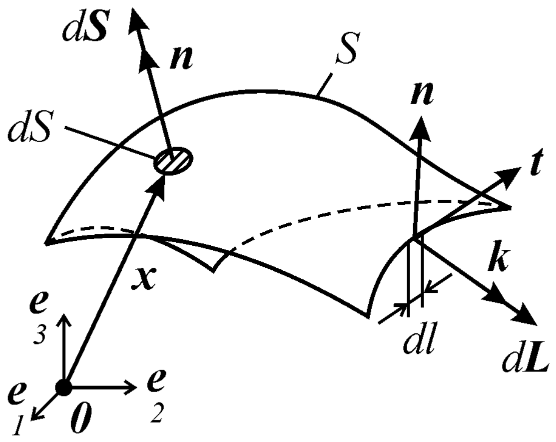


Рис.5.8. Поверхность интегрирования

представляет собой элемент контура оболочки; его длина равна dl, а направление определяется единичным вектором $\boldsymbol{k}$ (рис.5.8):

$$\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{t}.$$

С учетом выражений (5.14) и (5.15), а также после сокращения δ выражение (5.11) приобретает вид:

$$\int_S \boldsymbol{T}\nabla dS = \oint_l \boldsymbol{T} d\boldsymbol{L}. \qquad (5.16)$$

Полученное выражение позволяет перейти от интегрирования потенциального поля по некоторой поверхности площадью S к интегрированию по ее контуру длиной l. Свернув полученное выражение векторно или скалярно, получим

$$\int_S (\boldsymbol{T} \otimes \nabla)\, dS = \oint_l \boldsymbol{T} \otimes d\boldsymbol{L}, \qquad (5.17)$$

где знак $\otimes$, как и раньше, означает любой вариант произведения, при этом в выражении (5.17) должны существовать производные. Нетрудно видеть, что это выражение аналогично формуле Остроградского – Гаусса, где интегрирование по объему преобразовывалось в интегрирование по поверхности, ограничивающей этот объем.

Преобразуем выражение (5.16), свернув его скалярно через альтернирующий тензор, спроецированный на нормаль к поверхности

$$\boldsymbol{Э}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{Э} \cdot \boldsymbol{n},$$

$$\int_S \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{Э}_{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla\, dS = \oint_l \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{Э}_{\boldsymbol{n}} \cdot d\boldsymbol{L}. \qquad (5.18)$$

Правая часть этого выражения представляет собой циркуляцию по контуру

$$\oint_l \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{Э}_{\boldsymbol{n}} \cdot d\boldsymbol{L} = \oint_l \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{Э} \cdot \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k} dl = \oint_l \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{k}\; dl.$$

Вспомним, что на контуре единичные векторы $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{t}$ взаимоортогональны и в правой декартовой системе координат представляют собой правую тройку векторов (см. рис.5.8), то есть

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{t}.$$

С учетом этого, правая часть предыдущего выражения принимает вид

$$\oint_l \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{k}\;dl = \oint_l \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{t}dl = \oint_l \boldsymbol{T}\cdot d\boldsymbol{l}\,.$$

Рассмотрим левую часть выражения (5.18)

$$\int_S \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Э}_{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla\;dS = \int_S \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Э}\cdot\boldsymbol{n}\cdot\nabla\;dS = -\int_S \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Э}\cdot\cdot\nabla\boldsymbol{n}\;dS =$$

$$= -\int_S (\boldsymbol{T}\times\nabla)\cdot\boldsymbol{n}dS = -\int_S (\boldsymbol{T}\times\nabla)\cdot d\boldsymbol{S}\;\;.$$

В результате выражение (5.18) принимает вид:

$$\int_S (\boldsymbol{T}\times\nabla)\cdot d\boldsymbol{S} = -\oint_l \boldsymbol{T}\cdot d\boldsymbol{l}\,.$$

Это выражение называют ***формулой Стокса***, а иногда – ***теоремой Стокса***, и формулируют следующим образом: ***циркуляция тензорного поля вдоль замкнутого контура равна потоку ротора (вихря) этого поля через поверхность, ограниченную этим контуром***.

5.6. Формулы Грина

Из формулы Остроградского – Гаусса следуют две формулы Грина. Пусть даны два скалярных поля $\varphi(\boldsymbol{x})$ и $\psi(\boldsymbol{x})$. Требуется вычислить интеграл по замкнутой поверхности S, ограничивающей объем V, следующего вида

$$\oint_{\boldsymbol{S}} \varphi * (\nabla\psi)\cdot d\boldsymbol{S} \tag{5.19}$$

Преобразуем это выражение двумя способами. Во-первых, в соответствии с теоремой Остроградского – Гаусса интеграл по поверхности, ограничивающий некоторый объем, можно преобразовать в интеграл по этому объему

$$\oint_{\boldsymbol{S}} \varphi * (\nabla\psi)\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V [\varphi * (\nabla\psi)]\cdot\nabla dV =$$

$$= \int_V [(\varphi\nabla)\cdot(\nabla\psi) + \varphi\Delta\psi]dV = \int_V (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\psi)dV + \int_V \varphi\Delta\psi dV\,. \tag{5.20}$$

Во-вторых,

$$\oint_{\boldsymbol{S}} \varphi * (\nabla\psi)\cdot d\boldsymbol{S} = \oint_{\boldsymbol{S}} \varphi * (\nabla\psi)\cdot\boldsymbol{n}dS\,.$$

Вспомним, что проекция градиента на единичное направление дает направленную производную в этом направлении

$$(\nabla\psi)\cdot\boldsymbol{n} = \psi'_{\boldsymbol{n}}\,.$$

Подставив результат в предыдущее выражение, получим

$$\oint_S \varphi * (\nabla\psi)\cdot d\boldsymbol{S} = \oint_S \varphi * \psi'_{\boldsymbol{n}}\, dS\,. \tag{5.21}$$

Приравняв выражения (5.20) и (5.21), после перестановки слагаемых получим

$$\int_V \varphi\Delta\psi dV = \oint_S \varphi * \psi'_{\boldsymbol{n}}\, dS - \int_V (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\psi) dV\,. \tag{5.22}$$

Полученное выражение обычно называют ***первой формулой Грина***.

Если из него вычесть то же самое выражение, но в котором функции φ и ψ поменять местами, то получим ***вторую формулу Грина***, называемую иначе ***теоремой Грина***

$$\int_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi) dV = \oint_S (\varphi * \psi'_{\boldsymbol{n}} - \psi * \varphi'_{\boldsymbol{n}}) dS\,. \tag{5.23}$$

Теорема Грина в основном используется в физике для решения двумерных потоковых интегралов, исходя из того, что сумма исходящих потоков в любой точке области равна результирующему потоку, суммируемому по всей ограничивающей поверхности.

5.7. Интегрирование по частям

В заключение этой главы рассмотрим удобный иногда вычислительный прием – интегрирование по частям. Как и в обычном математическом анализе, он вытекает из формулы дифференцирования произведения функций, но требует обычной осторожности при оперировании с тензорными величинами. Например, из выражения

$$d(\boldsymbol{Ta}) = d\boldsymbol{Ta} + \boldsymbol{T}d\boldsymbol{a}$$

следует

$$\int \boldsymbol{T}d\boldsymbol{a} = \int d(\boldsymbol{Ta}) - \int (d\boldsymbol{T} * \boldsymbol{a})\,. \tag{5.24}$$

Для течения по линии AB

$$\int_A^B \boldsymbol{T}(\boldsymbol{a}\nabla)\cdot dl = \int_A^B \boldsymbol{T}d\boldsymbol{a} = \int_A^B d(\boldsymbol{Ta}) - \int_A^B (d\boldsymbol{T} * \boldsymbol{a}) =$$

$$= (\boldsymbol{Ta})_B - (\boldsymbol{Ta})_A - \int_A^B [dl\cdot(\nabla\boldsymbol{T})\boldsymbol{a}]\,.$$

Пример №5. Вычислить интеграл

$$\boldsymbol{t} = \int_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{B}} \left[d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\right]$$

Вычислим этот интеграл с использованием выражения (5.24):

$$\boldsymbol{t} = \int\limits_{A}^{B} [d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})] = \int\limits_{A}^{B} d(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{T}) - \int\limits_{A}^{B} \boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{T}.$$

Вспомним, что

$$d\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}\nabla \cdot d\boldsymbol{x},$$

с учетом этого предыдущее выражение примет вид

$$\boldsymbol{t} = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{T})_B - (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{T})_A - \int\limits_{A}^{B} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{T}\nabla \cdot d\boldsymbol{x} =$$

$$= \boldsymbol{x}_B \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}_B) - \boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}_A) - \int\limits_{A}^{B} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{T}\nabla \cdot d\boldsymbol{x}.$$

Оказывается, можно получить другой вариант ответа, не требующий знания значений тензора $\boldsymbol{T}$ в точке B. Для этого произведем в заданном выражении замену дифференциала

$$d\boldsymbol{x} = -d(\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}).$$

тогда

$$\boldsymbol{t} = -(\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{T} \,|_A^B + \int\limits_{A}^{B} (\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{T}\nabla \cdot d\boldsymbol{x} =$$

$$= (\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_A) \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}_A) + \int\limits_{A}^{B} (\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{T}\nabla \cdot d\boldsymbol{x}.$$

5.8. Контрольные вопросы для закрепления материала

Вопросы для закрепления материала

- Каковы варианты интегрирования в тензорном поле по линии? По поверхности? По объему?
- Что представляют собой векторные дифференциалы? Для каких вариантов интегрирования они используются?
- Что такое среднее значение тензора по линии? По поверхности? По объему?
- Как различные способы интегрирования влияют на валентность интегралов?
- Как свести интегрирование с векторным дифференциалом к интегрированию со скалярным дифференциалом?
- Какие бывают признаки потенциальности тензорного поля?
- Что такое циркуляция и чему она равна в потенциальном поле?
- Что представляет собой формула Ньютона-Лейбница?

- Чему равна работа сил потенциального поля при перемещении точки вдоль криволинейной траектории?
- В чем состоит теорема Остроградского – Гаусса? Как она выводится?
- В чем состоит теорема Стокса? Как она выводится?
- Что представляют собой формулы Грина? Откуда они следуют?
- В чем особенность интегрирование тензорных функций по частям?

Задачи для самостоятельного решения

- Найдите работу в поле электрической силы

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{E}{x^3}\boldsymbol{x},$$

  от точечного заряда, помещенного в начало координат при перемещении единичного заряда из точки A в точку B.
- Вычислите интегралы по замкнутым контурам:

$$\oint_l d\boldsymbol{l}, \qquad \oint_l \boldsymbol{I} dl, \qquad \oint_l \boldsymbol{I} \boldsymbol{x} d\boldsymbol{l}.$$

- Вычислите интегралы по замкнутым поверхностям:

$$\oint_S \boldsymbol{x} d\boldsymbol{S}, \qquad \oint_S \boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{S}, \qquad \oint_S \boldsymbol{x} \times d\boldsymbol{S}.$$

- В каком случае выполнится равенство $\oint_S \lambda \boldsymbol{x}^2 d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$, если λ – это число?
- Преобразуйте заданный интеграл по поверхности в интеграл по кривой, ограничивающей эту поверхность

$$\int_S \boldsymbol{n}\, dS, \ \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{x}}{x}.$$

- Преобразуйте заданный интеграл по объему в интеграл по поверхности, ограничивающей этот объем

$$3\int_V \boldsymbol{x} dV.$$

- Найдите тензорное поле $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$, если известно, что поверхность площадью S ограничивает область пространства объемом V:

$$\oint_S \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{S} = 2\boldsymbol{I}V.$$