4. ТЕНЗОРНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Для освоения следующего, более сложного раздела теории упругости – напряжения и деформации при неоднородном напряженном состоянии – необходимо прежде изучить некоторые элементы тензорного анализа, а именно: тензорное дифференцирование и интегрирование. В этой главе будут даны понятия тензор-функции, направленной производной, градиента, дивергенции и ротора, а также будут рассмотрены основные особенности тензорного дифференцирования функций.

4.1. Тензор–функция скалярного аргумента

Пусть на некотором интервале изменения числа α каждому значению этого числа соответствует некий тензор $\boldsymbol{T}$, тогда функция, отражающая это соответствие, называется ***тензор–функцией скалярного аргумента***

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\alpha). \qquad (4.1)$$

Например, параметром этой функции может служить время, тогда функция (4.1) будет отражать кинетику тензора (изменение во времени). В координатной форме при постоянном базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ выражение (4.1) соответствует девяти скалярным функциям:

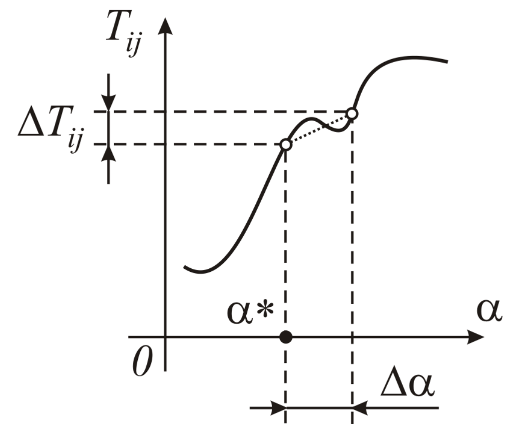

Рис.4.1. Зависимость координат тензор-функции от скалярного аргумента

$$T_{ij} = T_{ij}(\alpha),$$

каждую из которых можно изобразить на плоскости (рис.4.1).

Для анализа функции в некоторой области аргумента α^* обычно сравнивают значения тензора при этом аргументе и еще каком-нибудь другом $\alpha^*+\Delta\alpha$, задавая различные приращения $\Delta\alpha$ и оценивая при этом разность

$$\Delta\boldsymbol{T} \equiv \boldsymbol{T}(\alpha^*+\Delta\alpha) - \boldsymbol{T}(\alpha^*).$$

Этот тензор называют изменением тензора $\boldsymbol{T}(\alpha)$ на интервале $[\alpha^*, \alpha^*+\Delta\alpha]$; естественно, $\Delta\boldsymbol{T}$ имеет ту же валентность, что и тензор $\boldsymbol{T}$. Более важна характеристика функции, полученная умножением $\Delta\boldsymbol{T}$ на величину, обратную интервалу изменения функции

$$(\Delta\alpha)^{-1} * \Delta\boldsymbol{T},$$

(или делением $\Delta \boldsymbol{T}$ на величину, равную этому интервалу: $\Delta \boldsymbol{T} / \Delta\alpha$). Полученный тензор представляет собой среднюю скорость изменения $\boldsymbol{T}$ на интервале $\Delta\alpha$, которая в общем случае зависит и от α^* и от $\Delta\alpha$.

Функция называется ***дифференцируемой***, если по мере уменьшения $\Delta\alpha$ средняя скорость ее изменения меняется все меньше, стремясь к некоторому пределу. При этом функция $\boldsymbol{T}(\alpha)$ все больше становится похожа на линейную функцию:

$$\tilde{\boldsymbol{T}}(\alpha) = \boldsymbol{T}(\alpha^*) + (\alpha - \alpha^*)\, \boldsymbol{T}',$$

где $\boldsymbol{T}'$ – это средняя скорость изменения $\boldsymbol{T}$ на интервале $\Delta\alpha$. В предельном случае, когда изменение аргумента бесконечно мало, исходная функция становится практически неотличима от линейной

$$\boldsymbol{T}(\alpha) \approx \tilde{\boldsymbol{T}}(\alpha).$$

В этом случае, введем обозначения:

$$\Delta\alpha \equiv d\alpha,\ \Delta \boldsymbol{T} \equiv d\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{T}' \equiv \frac{1}{d\alpha} * d\boldsymbol{T}. \qquad (4.2)$$

Бесконечно малое приращение аргумента $d\alpha$ будем называть *дифференциалом аргумента,* бесконечно малое изменение функции $d\boldsymbol{T}$ – *дифференциалом функции*, а произведение дифференциала функции и величины, обратной дифференциалу аргумента, – *производной* функции $\boldsymbol{T}(\alpha)$ при аргументе α^*. Таким образом, можно записать, что в бесконечно малой окрестности аргумента α^* исходная тензорная функция $\boldsymbol{T}(\alpha)$ может быть аппроксимирована линейной функцией:

$$\boldsymbol{T}(\alpha) \approx \boldsymbol{T}(\alpha^*) + d\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\alpha^*) + \boldsymbol{T}' * d\alpha,$$

Вспомним, что аналогичные термины используются в курсе математического анализа, где рассматривают тензорные функции нулевой валентности, то есть скалярные функции. В нашем случае скалярным является только аргумент (и, естественно, все его приращения), а функция (и все ее приращения) представляет собой тензор произвольной валентности. Важно, что производная такой тензор-функции – это тензор той же валентности, что и сама функция – следствие выражений (4.2).

4.2. Дифференцирование функции нескольких переменных

Рассмотрим тензор-функцию двух несвязанных друг с другом аргументов

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\alpha_1, \alpha_2).$$

В малой окрестности точки $\{\alpha_1^*, \alpha_2^*\}$ ее приращение можно задать следующим образом:

$$\Delta \boldsymbol{T} \equiv \boldsymbol{T}(\alpha_1^* + \Delta\alpha_1, \alpha_2^* + \Delta\alpha_2) - \boldsymbol{T}(\alpha_1^*, \alpha_2^*).$$

Заметим, что тензор $\Delta \boldsymbol{T}$ здесь зависит уже не от двух, как было в предыдущем пункте, а от четырех параметров: α_1^*, α_2^*, $\Delta\alpha_1^*$, $\Delta\alpha_2^*$.

Дифференцируемость функции $\boldsymbol{T}(\alpha_1, \alpha_2)$ означает, что если приращения аргументов достаточно малы, то в окрестности точки $\{\alpha_{\boldsymbol{i}}^*\}$ эту функцию можно аппроксимировать линейной:

$$\tilde{\boldsymbol{T}}(\alpha_i) = \boldsymbol{T}^* + \Delta \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^* + \Delta\alpha_1^* \boldsymbol{T}^1 + \Delta\alpha_2^* \boldsymbol{T}^2,$$

где $\boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{T}(\alpha_1^*, \alpha_2^*)$, $\boldsymbol{T}^1$ – скорость изменения функции с ростом первого аргумента при неизменности второго, а $\boldsymbol{T}^2$ наоборот – скорость изменения функции с ростом второго аргумента при постоянстве первого:

$$\boldsymbol{T}^1 = \frac{\boldsymbol{T}(\alpha_1^* + \Delta\alpha_1, \alpha_2^*) - \boldsymbol{T}^*}{\Delta\alpha_1}, \quad \boldsymbol{T}^2 = \frac{\boldsymbol{T}(\alpha_1^*, \alpha_2^* + \Delta\alpha_2) - \boldsymbol{T}^*}{\Delta\alpha_2}.$$

Если приращения аргументов устремить к нулю, то ошибка используемой линейной аппроксимации также будет стремиться к нулю:

$$\boldsymbol{T}(\alpha_i) \approx \boldsymbol{T}^* + d\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^* + d\alpha_1\, \boldsymbol{T}^1 + d\alpha_2\, \boldsymbol{T}^2.$$

При устремлении приращений аргументов к нулю тензоры $\boldsymbol{T}^1$ и $\boldsymbol{T}^2$ будем называть ***частными производными*** функции $\boldsymbol{T}(\alpha_1, \alpha_2)$ по первому и по второму аргументу соответственно:

$$\boldsymbol{T}^1 = \lim_{\Delta\alpha_1 \to 0} \left[\frac{\boldsymbol{T}(\alpha_1^* + \Delta\alpha_1, \alpha_2^*) - \boldsymbol{T}^*}{\Delta\alpha_1} \right] \equiv \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \alpha_1},$$

$$\boldsymbol{T}^2 = \lim_{\Delta\alpha_2 \to 0} \left[\frac{\boldsymbol{T}(\alpha_1^*, \alpha_2^* + \Delta\alpha_2) - \boldsymbol{T}^*}{\Delta\alpha_2} \right] \equiv \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \alpha_2},$$

а бесконечно малое изменение функции

$$d\boldsymbol{T} = d\alpha_1 \boldsymbol{T}^1 + d\alpha_2 \boldsymbol{T}^2$$

будем называть дифференциалом функции двух переменных.

В общем случае тензор-функция может иметь произвольное количество аргументов:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{\boldsymbol{k}}).$$

Тогда дифференциал этой функции удобно записывать с помощью сокращенной формы записи Эйнштейна

$$d\boldsymbol{T} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \alpha_i} d\alpha_i, \; i = 1 \ldots k,$$

а линейная аппроксимация функции в бесконечно малой окрестности точки $\{\alpha_{\boldsymbol{i}}^*\}$ примет вид:

$$\boldsymbol{T}(\alpha_i) \approx \boldsymbol{T}^* + \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \alpha_i} d\alpha_i, \; i = 1 \ldots k.$$

4.3. Дифференцирование сложной функции

Пусть задана тензор-функция скалярного аргумента, где аргумент также является функцией другого скалярного параметра, например, времени:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\alpha), \qquad \alpha = f(t),$$

тогда можно записать в дифференциалах:

$$d\alpha = f'(t)\, dt, \qquad d\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}'(\alpha)\, d\alpha = \boldsymbol{T}'(\alpha)\, f'(t)\, dt.$$

Производная заданной функции по времени представляет собой следующее:

$$d\boldsymbol{T}/dt \equiv \dot{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{T}'(\alpha)\, f'(t),$$

то есть скорость изменения тензора – это произведение двух производных. Естественно, тензоры $\dot{\boldsymbol{T}}$ и $\boldsymbol{T}'$ имеют ту же валентность, что и $\boldsymbol{T}$.

Рассмотрим более сложный случай: пусть задана тензор-функция двух скалярных аргументов, где один из аргументов является функцией второго:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\alpha, t), \qquad \alpha = f(t),$$

тогда дифференциал этой функции равен сумме частных производных, умноженных на соответствующие дифференциалы аргументов:

$$d\boldsymbol{T} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t} dt.$$

Учитывая, что $d\alpha = f'(t)dt$, получим

$$\dot{\boldsymbol{T}} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \alpha} f'(t) + \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t}$$

Аналогична ситуация, когда

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\alpha_i, t), \quad \alpha_i = f_i(t).$$

В этом случае дифференциал функции равен

$$d\boldsymbol{T} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \alpha_i} d\alpha_i + \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t} dt = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \alpha_i} f_i' \, dt + \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t} dt,$$

а скорость изменения тензора представляет собой следующее:

$$\dot{\boldsymbol{T}} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i + \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t}.$$

4.4. Понятие поля

Полем называют тензорную функцию вектора, когда вектор-аргумент определяет точку пространства. При выбранном полюсе все точки пространства определяются своими ***радиус-векторами*** $\boldsymbol{x}$, начало которых лежит в полюсе, а конец – в рассматриваемой точке.

Для задания точки часто используют координаты, то есть наборы чисел, характеризующие пространственное положение точки. Наиболее удобны декартовы координаты, представляющие собой проекции радиус-вектора на оси выбранного декартового базиса:

$$x_i = \boldsymbol{x} \cdot \underset{i}{\boldsymbol{e}}.$$

Для наглядного представления на плоскости скалярного поля часто используют линии уровня. ***Линия уровня*** представляет собой совокупность точек плоскости, в которых значение функции равно выбранному значению, одинаковому для всех точек линии

$$\lambda(x_1, x_2) = const.$$

Например, на географической карте линии уровня соответствуют точкам, лежащим на одной высоте над уровнем моря. Аналогичные примеры – изотермы, изобары и т.д. Значение функции на линии уровня называется параметром линии (например: $h = 100$ м, $h = 200$ м, $h = 300$ м и т.д.); для наглядности разницу между параметрами линии обычно задают одинаковой.

Для отображения скалярного поля в пространстве используют ***поверхности уровня***, каждая из которых представляет совокупность точек пространства, в которых значение функции равно выбранному значению, одинаковому для всех точек поверхности

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) = const.$$

Примерами пространственных полей могут служить распределения температур, влажностей или давлений в каком-либо помещении.

Изобразить пространственное поле значительно сложнее, чем плоское. Это можно сделать, например, с помощью линий уровня, которые будут являться пересечениями поверхностей уровня с заданными параллельными плоскостями.

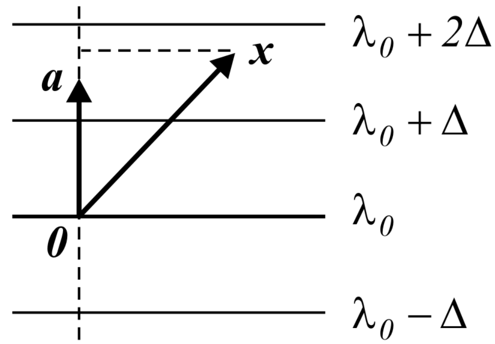

Рис.4.2. Линии уровня поля $\lambda(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} + \lambda_0$

Пример №1. Простейшее поле является линейным, например,

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} + \lambda_0.$$

Поверхности уровня такого поля ортогональны заданному (постоянному) вектору $\boldsymbol{a}$ и представляют собой плоскости, которые отстоят друг от друга на равных расстояниях, если параметры этих поверхностей уровня различаются на одинаковую величину, например, Δ. Линии уровня этого поля – это соответственно равноотстоящие друг от друга прямые. Их можно изобразить, как показано на рис.4.2.

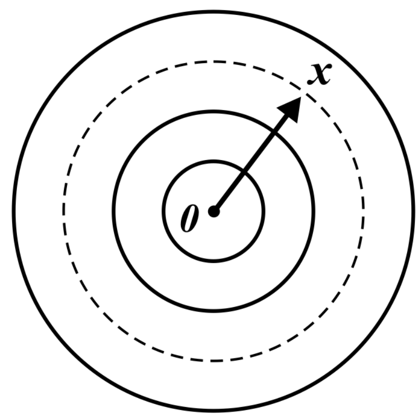

Рис.4.3. Линии уровня поля $\lambda(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|$

Пример №2. Рассмотрим скалярное поле, которое представляет собой модуль радиус вектора

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|.$$

Поверхности уровня такого поля представляют собой равноотстоящие друг от друга концентрические сферы, а его линии уровня – это соответственно концентрические окружности, равноотстоящие друг от друга (рис.4.3).

Поле может быть не только скалярным (как, например, температурное поле), но и векторным (поле скоростей, силовое поле), а также тензорным (поле тензоров напряжений или деформаций).

Векторные поля иногда представляют с помощью линий тока: касательная к линии тока в каждой точке линии показывает направление вектора в этой точке. Тем самым дается представление о направлении, но не о величине векторов в разных точках поля. Длины векторов могут быть дополнительно представлены поверхностями уровня. Другой путь – поверхности уровня для каждой из трех координат вектора (три скалярных поля) – менее нагляден.

Тензорные поля можно отображать единственным способом – с помощью поверхностей (или линий) уровня их координат. Например, для отображения на плоскости поля тензоров напряжений (такая необходимость может возникнуть при неоднородном напряженном состоянии) необходимо построить шесть картин линий уровня – для каждой из координат с учетом симметрии тензоров напряжений. При этом базис, в котором определены координаты всех тензоров поля, должен быть одинаковым.

4.5. Направленная производная

Пусть в области векторных аргументов

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2$$

задано скалярное поле $\lambda(\boldsymbol{x})$; значения этого поля показаны на рис.4.4 (ось $\lambda(\boldsymbol{x})$ ортогональна плоскости аргументов). Рассмотрим, как изменяются значения функции при изменении аргумента вдоль оси s, направление которой задано единичным вектором $\boldsymbol{t}$. С этой целью удобно перейти от векторного аргумента $\boldsymbol{x}$ к скалярному аргументу s (координату s будем отсчитывать по направлению вектора $\boldsymbol{t}$ от точки, заданной радиус-вектором $\boldsymbol{x}_0$):

$$\lambda(\boldsymbol{x}) \to \lambda(s).$$

Теперь можно записать

$$\lambda(\boldsymbol{x}^*) \equiv \lambda(s^*),\ \lambda(\boldsymbol{x}^* + \Delta\boldsymbol{x}) \equiv \lambda(s^* + \Delta s),\ \Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{t} * \Delta s.$$

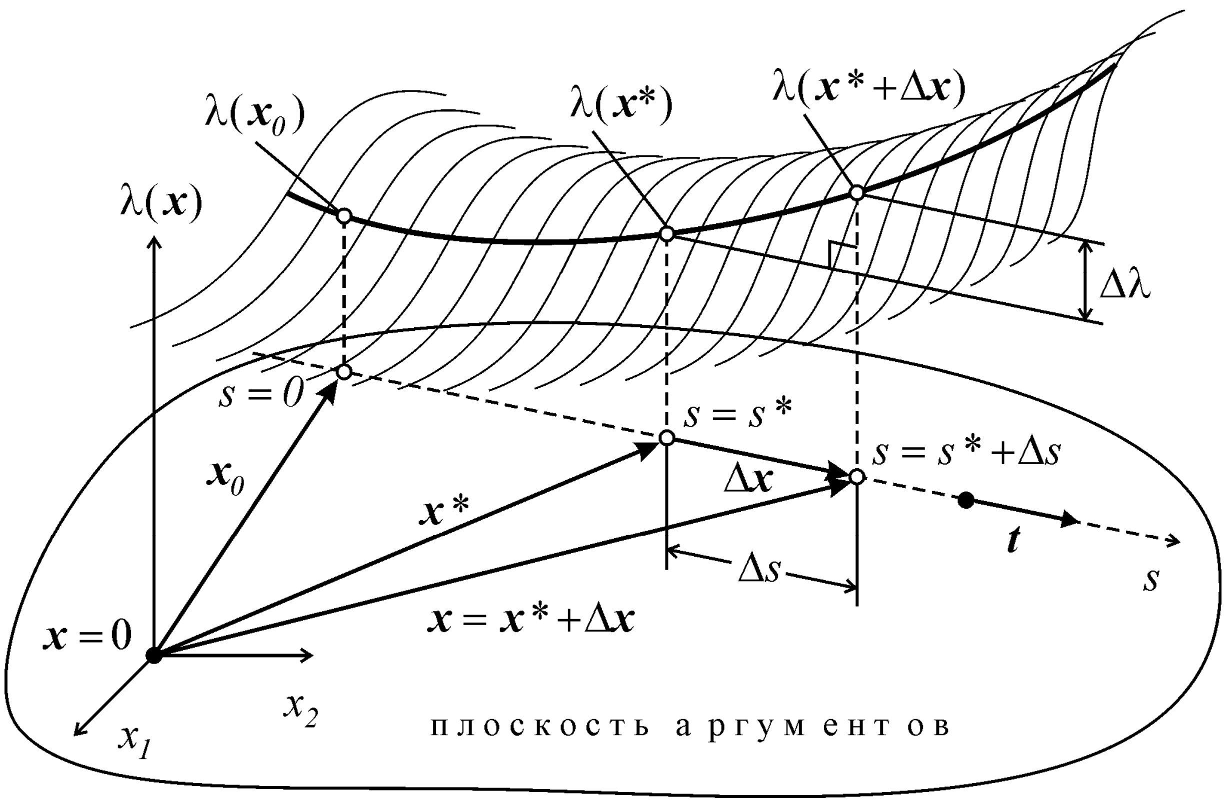

Рис.4.4. Изменение функции $\lambda(\boldsymbol{x})$ в направлении оси s

В результате осуществленного перехода (от векторных аргументов к скалярным) можно ввести понятие направленной производной функции: ***направленная производная*** функции $\lambda(\boldsymbol{x})$ в точке $\boldsymbol{x}^*$ в направлении вектора $\boldsymbol{t}$ представляет собой скорость изменения функции $\lambda(s)$ с ростом s в точке s^*:

$$\lambda_{\boldsymbol{t}}' \equiv \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\lambda(\boldsymbol{x}^* + \Delta\boldsymbol{x}) - \lambda(\boldsymbol{x}^*)}{\Delta s} = \frac{d\lambda}{ds}. \qquad (4.3)$$

Направленную производную тензорного поля вычисляют аналогично:

$$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{t}}' = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}^* + \Delta\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}^*)}{\Delta s} = \frac{d\boldsymbol{T}}{ds}. \qquad (4.4)$$

Вычислив производные в направлении некоторого вектора $\boldsymbol{t}$ в каждой точке тензорного поля, получим новое поле – поле направленных производных, которое будет иметь ту же валентность, что и исходное поле. Варьируя направление вектора $\boldsymbol{t}$, получим бесконечное множество таких полей, так как в каждой своей точке поле имеет бесконечное число направленных производных по все возможным направлениям. Но, как будет показано ниже, это множество упорядоченно.

4.6. Градиент скалярного поля

Мы полагаем, что функция, определяющая скалярное поле, дифференцируема. Это означает, что в произвольной точке поля существует множество направленных производных по всем направлениям. Однако дифференцируемость означает не только «спрямляемость» сечений поля в малых окрестностях точек, но и «спрямляемость» линий уровня. Отсюда следует, что множество направленных производных упорядочено и, как увидим ниже, описывается одним вектором.

Пусть в области векторных аргументов, заданных на плоскости, дано некоторое скалярное поле $\lambda(\boldsymbol{x})$. Рассмотрим малую окрестность точки $\boldsymbol{A}$, которая определена радиус-вектором $\boldsymbol{x}^*$, как показано на рис.4.5, тогда линии уровня в окрестности этой точки будут прямыми. Через точку $\boldsymbol{A}$ проведем линию уровня

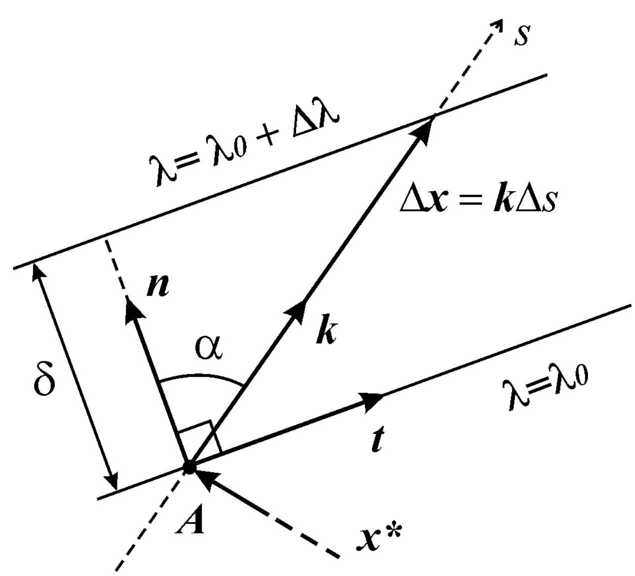

Рис.4.5. Картина линий уровня скалярного поля в малой окрестности точки $\boldsymbol{A}$

$$\lambda = \lambda(\boldsymbol{x}^*) = const = \lambda_0,$$

а на некотором расстоянии от нее δ – другую линию уровня

$$\lambda = const = \lambda_0 + \Delta\lambda .$$

Минимальное (по модулю) значение производной в точке $\boldsymbol{A}$ достигается в направлении единичного вектора $\boldsymbol{t}$, так как вдоль линии уровня $\lambda = const$:

$$\lambda'_{\boldsymbol{t}} = 0 .$$

Максимальное значение производной – в направлении единичного вектора $\boldsymbol{n}$, который ортогонален вектору $\boldsymbol{t}$ и направлен в сторону возрастания $\lambda(\boldsymbol{x})$:

$$\lambda'_{\boldsymbol{n}} = \Delta\lambda / \delta .$$

Для произвольного направления, заданного единичным вектором $\boldsymbol{k}$ (под угол α к вектору $\boldsymbol{n}$), с учетом того, что

$$\Delta s \equiv \left|\Delta \boldsymbol{x}\right| = \delta / cos\alpha ;$$

можно записать следующее:

$$\lambda'_{\boldsymbol{k}} = \frac{\Delta\lambda}{\Delta s} = \frac{\Delta\lambda}{\delta} cos\alpha = \lambda'_{\boldsymbol{n}} cos\alpha = \lambda'_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k} .$$

Это выражение показывает, что достаточно знать одну направленную производную (для этого удобно использовать именно $\lambda'_{\boldsymbol{n}}$), чтобы вычислить направленную производную в любом другом направлении. Вектор $\lambda'_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{n}$ называют ***градиентом*** поля $\lambda(\boldsymbol{x})$ и обозначают $\nabla\lambda$; с учетом введенного обозначения предыдущее выражение примет вид

$$\lambda'_{\boldsymbol{k}} = \nabla\lambda \cdot \boldsymbol{k} . \tag{4.5}$$

Это выражение будем считать определением: ***градиент скалярного поля в некоторой точке – это такой вектор, что если его спроецировать на некоторое направление, то в результате получим производную поля в этом направлении в заданной точке***. Отметим, что в этом выражении градиент выступает как оператор линейной связи между единичным вектором, задающим направление, и производной функции в этом направлении.

Из выражения (4.3) выразим дифференциал функции $\lambda(s)$ и учтем предыдущее выражение:

$$d\lambda = \lambda'_{\boldsymbol{k}} ds = \nabla\lambda \cdot \underbrace{\boldsymbol{k} ds}_{d\boldsymbol{x}} .$$

Отсюда следует, что дифференциал скалярной функции представляет собой скалярное произведение градиента этой функции и дифференциала аргумента:

$$d\lambda = \nabla\lambda \cdot d\boldsymbol{x} . \tag{4.6}$$

В этом выражении, как и в выражении (4.5), градиент выступает оператором линейной связи, однако здесь градиент связывает дифференциал векторного аргумента и дифференциал скалярной функции. Нетрудно заметить, что градиент является расширением понятия производной: $dy = y'\,dx$.

Вспомним, что дифференциал функции нескольких переменных можно расписать через дифференциалы аргументов:

$$d\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial x_i}dx_i = \frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\underset{i}{\boldsymbol{e}}\cdot d\boldsymbol{x},$$

Сравнивая последнее выражение с выражением (4.6), получим, что ***градиент скалярного поля*** *равен сумме частных производных функции по каждой из координат, умноженных на соответствующие базисные векторы*:

$$\nabla\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\underset{i}{\boldsymbol{e}} \equiv \lambda,_i\underset{i}{\boldsymbol{e}}. \tag{4.7}$$

Это выражение иногда также называют определением градиента поля λ. В выражении (4.7) используется символ

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}\underset{i}{\boldsymbol{e}},$$

который называют ***оператором Гамильтона***. Этот оператор, кроме того, что он является оператором дифференцирования, также представляет собой символический вектор: символический, потому что он не имеет ни длины, ни направления (его невозможно изобразить в пространстве или на плоскости); вектор – потому что в тензорных выражениях он участвует как объект, обладающий свойствами вектора.

Пример №1. Найти в точке ($1, -2, 4$) градиент скалярного поля

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = 8x_1x_2 - 5x_3^2.$$

Вычислим поле градиентов заданной функции λ:

$$\nabla\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1}(8x_1x_2 - 5x_3^2)\underset{1}{\boldsymbol{e}} + \frac{\partial}{\partial x_2}(8x_1x_2 - 5x_3^2)\underset{2}{\boldsymbol{e}} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_3}(8x_1x_2 - 5x_3^2)\underset{3}{\boldsymbol{e}} = 8x_2\underset{1}{\boldsymbol{e}} + 8x_1\underset{2}{\boldsymbol{e}} - 10x_3\underset{3}{\boldsymbol{e}}.$$

Подставив координаты заданной точки, получим ответ:

$$\nabla\lambda(\boldsymbol{x}) = 8*1\underset{1}{\boldsymbol{e}} + 8*(-2)\underset{2}{\boldsymbol{e}} - 10*4\underset{3}{\boldsymbol{e}} = 8\underset{1}{\boldsymbol{e}} - 16\underset{2}{\boldsymbol{e}} - 40\underset{3}{\boldsymbol{e}}.$$

Пример №2. Вычислить направленную производную функции $\lambda(\boldsymbol{x})$ из предыдущего примера в точке $(2, 1, 1)$ в направлении вектора

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 .$$

Вычислим поле направленных производных:

$$\lambda'_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \nabla\lambda \cdot \boldsymbol{k} = (8x_2\boldsymbol{e}_1 + 8x_1\boldsymbol{e}_2 - 10x_3\boldsymbol{e}_3) \cdot (\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2) = 8x_2 - 16x_1 .$$

В точке с координатами $(2, 1, 1)$ направленная производная равна

$$\lambda'_{\boldsymbol{k}} = 8*1 - 16*2 = -24 .$$

Отметим что, вычисляя градиент скалярного поля в каждой его точке, получим новое поле – векторное поле градиентов. При этом совершенно не важно, вычислены ли градиенты в одном и том же базисе или нет: градиент инвариантен и от базиса не зависит, так как фактически он представляет собой вектор, ортогональный линии уровня и направленный в сторону возрастания функции.

4.7. Градиент тензорного поля

По аналогии со скалярным полем можно ввести понятие градиента тензорного поля и дать определение: ***градиент тензорного поля в некоторой точке – это такой тензор, что если его спроецировать на некоторое направление, заданное единичным вектором, то в результате получим производную заданного тензорного поля в заданной точке в направлении этого вектора***:

$$\boldsymbol{T}'_{\boldsymbol{k}} = \nabla\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{k} .$$

Также по аналогии со скалярным полем ***градиент тензорного поля*** *равен сумме частных производных функции по каждой из координат, умноженных на соответствующие базисные векторы*

$$\boldsymbol{T}\nabla = \frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i ,$$

а ***дифференциал тензорного поля*** *представляет собой скалярное произведение градиента этого поля и дифференциала аргумента*

$$d\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{T}\nabla) \cdot d\boldsymbol{x} . \qquad (4.8)$$

Градиент $\boldsymbol{T}\nabla$ называют ***правым градиентом*** поля $\boldsymbol{T}$. Очевидно, что у тензорных полей есть и левый градиент

$$\nabla\boldsymbol{T} = \boldsymbol{e}_i \frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial x_i} ,$$

причем правый и левый градиент не равны друг другу, что обусловлено некоммутативностью тензорного произведения. Левый и правый градиенты двухвалентного тензора связаны друг с другом следующим образом:

$$\nabla \boldsymbol{T} = \underset{\substack{1\mathrm{T}2\\ 2\mathrm{T}3}}{\boldsymbol{T}\nabla} .$$

*Пример №*3. Вычислить градиент поля радиус-векторов

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} .$$

$$\nabla \boldsymbol{x} = \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 \underset{1}{\boldsymbol{e}} + x_2 \underset{2}{\boldsymbol{e}} + x_3 \underset{2}{\boldsymbol{e}})\underset{1}{\boldsymbol{e}} + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1 \underset{1}{\boldsymbol{e}} + x_2 \underset{2}{\boldsymbol{e}} + x_3 \underset{2}{\boldsymbol{e}})\underset{2}{\boldsymbol{e}} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_3}(x_1 \underset{1}{\boldsymbol{e}} + x_2 \underset{2}{\boldsymbol{e}} + x_3 \underset{2}{\boldsymbol{e}})\underset{3}{\boldsymbol{e}} = \underset{1}{\boldsymbol{e}}\underset{1}{\boldsymbol{e}} + \underset{2}{\boldsymbol{e}}\underset{2}{\boldsymbol{e}} + \underset{3}{\boldsymbol{e}}\underset{3}{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{I} .$$

Полученный результат полезно запомнить как информацию, которая будет активно использоваться нами в будущих выкладках.

*Пример №*4. Вычислить градиент векторного поля

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} ,$$

где $\boldsymbol{a}$ – это некоторый постоянный вектор, например, $\boldsymbol{a} = 2\underset{1}{\boldsymbol{e}} - 2\underset{2}{\boldsymbol{e}} + \underset{3}{\boldsymbol{e}}$.

$$\nabla(2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}) = \frac{\partial}{\partial x_1}((2x_1 + 2)\underset{1}{\boldsymbol{e}} + (2x_2 - 2)\underset{2}{\boldsymbol{e}} + (2x_3 + 1)\underset{2}{\boldsymbol{e}})\underset{1}{\boldsymbol{e}} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_2}((2x_1 + 2)\underset{1}{\boldsymbol{e}} + (2x_2 - 2)\underset{2}{\boldsymbol{e}} + (2x_3 + 1)\underset{2}{\boldsymbol{e}})\underset{2}{\boldsymbol{e}} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_3}((2x_1 + 2)\underset{1}{\boldsymbol{e}} + (2x_2 - 2)\underset{2}{\boldsymbol{e}} + (2x_3 + 1)\underset{2}{\boldsymbol{e}})\underset{3}{\boldsymbol{e}} = 2\underset{1}{\boldsymbol{e}}\underset{1}{\boldsymbol{e}} + 2\underset{2}{\boldsymbol{e}}\underset{2}{\boldsymbol{e}} + 2\underset{3}{\boldsymbol{e}}\underset{3}{\boldsymbol{e}} = 2\boldsymbol{I} .$$

Заметим, что если отнестись к оператору Гамильтона не только как к оператору дифференцирования, но и как к вектору (несмотря, на то, что он символический), то операция вычисления градиента может быть существенно упрощена:

$$\nabla(2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}) = 2\underbrace{\nabla\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{I}} + \underbrace{\nabla\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{0}} = 2\boldsymbol{I} .$$

Этот дуализм оператора Гамильтона (свойство являться одновременно и оператором дифференцирования и символическим вектором) будет рассмотрен в следующем пункте более подробно.

С помощью вычисления градиента какого-то поля в каждой точке получим новое поле, валентность которого на единицу выше, чем исходного. Если тензорное поле $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ является градиентом некоторого тензора $\boldsymbol{\psi}$:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x})\nabla,$$

то такое поле будем называть ***потенциальным***, а функцию $\psi(\boldsymbol{x})$ – потенциалом этого поля.

4.8. Оператор Гамильтона

При записи математических выражений оператор Гамильтона может участвовать и как обычный вектор:

$$\nabla\lambda = \lambda\nabla, \quad \nabla\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}\nabla)^{\mathrm{T}}, \quad \nabla(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \nabla\boldsymbol{a} + \nabla\boldsymbol{b}, \quad \nabla \underset{\circ}{\boldsymbol{f}} = \nabla \cdot \boldsymbol{f};$$

и как оператор дифференцирования

$$\nabla(\lambda\mu) = (\nabla\lambda)\mu + (\nabla\mu)\lambda, \quad \nabla(\boldsymbol{a}\mu) = \mu(\nabla\boldsymbol{a}) + (\nabla\mu)\boldsymbol{a}.$$

Например, пусть задано тензорное поле $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ произвольной валентности. Выражение для записи его дифференциала имеет вид (4.8):

$$d\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{T}\nabla)\cdot d\boldsymbol{x}.$$

В этом выражении использовали правый градиент, но тот же самый дифференциал можно записать и через левый градиент тензора $\boldsymbol{T}$, однако просто поменять местами тензорные множители $\boldsymbol{T}$ и ∇ нельзя: $d\boldsymbol{T} \neq \nabla\boldsymbol{T}\cdot d\boldsymbol{x}$. При этом не соблюдается порядок тензорных операций, и скалярное произведение связывает вектор $d\boldsymbol{x}$ с последним вектором каждой полиады, составляющей тензор $\boldsymbol{T}$, вместо того, чтобы связывать вектор $d\boldsymbol{x}$ с вектором ∇, как в исходном выражении. Для того чтобы не нарушить порядок тензорных операций необходимо преобразовать исходное выражение следующим образом:

$$d\boldsymbol{T} = d\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{T}).$$

Теперь скалярная точка разделяет те же векторы, что и в исходном выражении (тот факт, что векторы ∇ и $d\boldsymbol{x}$ в преобразованном выражении поменялись местами, роли не играет в силу коммутативности скалярного произведения). Результат скалярного произведения представляет собой число, которое, как известно, можно поместить в любое место полиады, то есть не имеет значение, находится оно после тензора $\boldsymbol{T}$ (как в исходном выражении) или перед ним (как в преобразованном выражении).

Также необходимо следить за тем, чтобы в преобразованном выражении оператор дифференцирования был применен к тому же тензору, что и в исходном. Например, в выражении $\boldsymbol{T}d\boldsymbol{x}\cdot\nabla$ порядок тензорных операций соблюден, однако оператор дифференцирования применен не к тензору $\boldsymbol{T}$, а к вектору $d\boldsymbol{x}$.

В тех случаях, когда неочевидно, к какой именно функции следует применять оператор дифференцирования, обычно ставят скобки. Например, если не ставить скобок в выражении $\boldsymbol{x}\cdot\nabla\boldsymbol{T}$, то результат можно трактовать двояко: или $(\boldsymbol{x}\cdot\nabla)\boldsymbol{T}$, или $\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{T})$. Договоримся, что если оператор Гамильтона находится внутри полиады, то операцию дифференцирования необходимо применять к объекту, стоящему справа от оператора ∇, то есть

$$\boldsymbol{x}\cdot\nabla\boldsymbol{T}\equiv\boldsymbol{x}\cdot(\nabla\boldsymbol{T}).$$

В противном случае необходимо использовать скобки: $(\boldsymbol{x}\cdot\nabla)\boldsymbol{T}$.

Пример №5. Раскрыть скобки в выражении

$$\nabla\times(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{T}),$$

если $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ – тензорная функция второй валентности, а $\boldsymbol{c}$ – постоянный вектор**.**

Для простоты сначала рассмотрим случай, когда тензор $\boldsymbol{T}$ представляет собой диаду $\boldsymbol{t}_1\boldsymbol{t}_2$. Поскольку $\boldsymbol{c}$ – это вектор постоянный, то оператор дифференцирования будем применять только к функции $\boldsymbol{t}_1\boldsymbol{t}_2$, тогда

$$\nabla\times(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{t}_1\boldsymbol{t}_2)=-\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{t}_1\boldsymbol{t}_2\times\nabla=-\underset{\otimes}{\underline{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{t}_1\boldsymbol{t}_2\nabla}}.$$

Легко видеть, что в этом выражении порядок тензорных операций не нарушен: скалярное произведение связывает векторы $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{t}_1$, а векторное произведение – векторы $\boldsymbol{t}_2$ и ∇. Здесь еще необходимо учесть перемену мест множителей в векторном произведении, что приводит к необходимости поменять знак выражения.

В случае, когда тензор $\boldsymbol{T}$ имеет общий вид, то есть представляет собой сумму девяти диад в декартовом базисе

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})=T_{11}(\boldsymbol{x})\underset{1}{\boldsymbol{e}}\underset{1}{\boldsymbol{e}}+T_{12}(\boldsymbol{x})\underset{1}{\boldsymbol{e}}\underset{2}{\boldsymbol{e}}+T_{13}(\boldsymbol{x})\underset{1}{\boldsymbol{e}}\underset{3}{\boldsymbol{e}}+\ldots$$

результат будет аналогичным:

$$\nabla\times(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{T})=-\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{T}\times\nabla=-\underset{\otimes}{\underline{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{T}\nabla}}.$$

Иногда для того, чтобы в процессе преобразований не нарушался порядок тензорных операций необходимо использовать транспонирование. Примеры таких преобразований будут подробно рассмотрены несколько позже (в пункте 4.10).

4.9. Дивергенция и ротор

Большой практический интерес, в том числе и для механики, представляют поля, полученные свертыванием градиента. Они получили специальные названия: дивергенция и ротор.

Дивергенцией называется скалярная свертка градиента:

$$div\,\boldsymbol{T} \equiv \underset{1\circ 2}{\nabla \boldsymbol{T}} = \nabla \cdot \boldsymbol{T}\,.$$

Если в каждой точке тензорного поля вычислить градиент и затем скалярно его свернуть, то в результате получим новое поле, валентность которого будет на единицу меньше, чем исходного. Например, дивергенция поля радиус-векторов $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ (векторного поля) представляет собой новое поле (скалярное), равное постоянной величине

$$\underset{\circ}{\nabla \boldsymbol{x}} = \underset{\circ}{\boldsymbol{I}} = 3,$$

то есть в каждой точке пространства значение этого нового поля (поля дивергенций) равно трем. Естественно, для существования дивергенции какого-либо поля, необходимо, чтобы его валентность была больше единицы, то есть поле, градиент которого необходимо свернуть, может быть векторным, тензорным, но не скалярным.

Дивергенция поля является показателем того, в какой степени данная точка пространства является источником или потребителем потока поля. Например, если в качестве поля мы возьмём совокупность направлений наискорейшего спуска на земной поверхности, то дивергенция покажет нам местоположение вершин и впадин, причём на вершинах дивергенция будет положительна (направления спуска расходятся от вершин), а на впадинах отрицательная (к впадинам направления спуска сходятся). На равнине дивергенция будет равна нулю.

В случае, когда оператор Гамильтона находится слева от тензора, дивергенцию называют левой, а когда справа – правой. Очевидно, что левая и правая дивергенция тензора в общем случае не совпадают. Однако если тензор симметричен $\boldsymbol{S}$ или кососимметричен $\boldsymbol{K}$ и при этом имеет вторую валентность, то в результате левая и правая дивергенции оказываются связанными друг с другом следующими соотношениями:

$$\underset{1\circ 2}{\nabla \boldsymbol{S}} \equiv \underset{2\circ 3}{\boldsymbol{S}\nabla}, \qquad \underset{1\circ 2}{\nabla \boldsymbol{K}} \equiv -\underset{2\circ 3}{\boldsymbol{K}\nabla}.$$

Наиболее часто в механике используется дивергенция двухвалентного тензора или вектора, поэтому рассмотрим особенности их вычисления более подробно. Дивергенция двухвалентного тензора представляет собой вектор

$$\underset{1\circ 2}{\nabla \boldsymbol{T}} = \nabla \cdot \boldsymbol{T} = \frac{\partial}{\partial x_i}\underset{i}{\boldsymbol{e}} \cdot T_{kl}\,\underset{k}{\boldsymbol{e}}\,\underset{l}{\boldsymbol{e}} = \frac{\partial T_{il}}{\partial x_i}\underset{l}{\boldsymbol{e}},$$

проекциями которого на базисные оси являются суммы частных производных

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{T})_i = \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_k} = \frac{\partial T_{1i}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{2i}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{3i}}{\partial x_3},$$

а дивергенция вектора – это число

$$\underset{\circ}{\nabla}\boldsymbol{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{a} = \frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i \cdot a_k \boldsymbol{e}_k = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}.$$

Дивергенцию вектора или двухвалентного тензора чаще всего удобно вычислять в матричной форме:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{a} = [\nabla]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{a}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix},$$

$$[\nabla \cdot \boldsymbol{T}] = [\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}[\nabla] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{bmatrix}.$$

Теперь перейдем к рассмотрению следующего понятия – ротора. ***Ротором называется векторная свертка градиента***:

$$rot\,\boldsymbol{T} \equiv \underset{1\otimes 2}{\nabla \boldsymbol{T}} = \nabla \times \boldsymbol{T}.$$

Если в каждой точке тензорного поля вычислить градиент и затем свернуть его векторно, то в результате получим новое поле, валентность которого будет такой же, как исходного. Например, ротор поля радиус-векторов $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ представляет собой также векторное поле, значение которого в каждой точке пространства равно нулевому вектору

$$\underset{\otimes}{\nabla}\boldsymbol{x} = \underset{\otimes}{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{0}.$$

Как и в случае дивергенции, поле, градиент которого необходимо свернуть, не может быть скалярным, а должно иметь валентность равную единице или более.

Ротор показывает насколько и в какую сторону закручено поле в каждой точке пространства. Например, если в качестве поля взять поле скоростей ветра на Земле, то для циклона, вращающегося по часовой стрелке, ротор будет противонаправлен ротору циклона, вращающегося против часовой стрелки. В тех местах, где ветры дуют равномерно и прямолинейно, ротор будет равен нулю. Поле, ротор которого равен нулю в любой точке, называется потенциальным (или безвихревым).

В случае, когда оператор Гамильтона находится слева от тензора, ротор, как и дивергенцию, называют левым, а когда справа – правым. Очевидно, что левый и правый ротор тензора в общем случае не совпадают.

Поскольку с точки зрения механики наибольший интерес представляют роторы векторных и двухвалентных тензорных полей, рассмотрим особенности их вычисления более подробно. Ротор векторного поля представляет собой поле векторов:

$$\underset{\otimes}{\nabla}\boldsymbol{a} = \frac{\partial}{\partial x_i}\underset{i}{\boldsymbol{e}}\times a_k \underset{k}{\boldsymbol{e}} = \delta_{ikm}\frac{\partial a_k}{\partial x_i}\underset{m}{\boldsymbol{e}}, \tag{4.9}$$

а ротор двухвалентного поля – поле двухвалентных тензоров:

$$\underset{1\otimes 2}{\nabla}\boldsymbol{T} = \frac{\partial}{\partial x_k}\underset{k}{\boldsymbol{e}}\times T_{ij}\underset{i}{\boldsymbol{e}}\underset{j}{\boldsymbol{e}} = \delta_{kim}\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}\underset{m}{\boldsymbol{e}}\underset{j}{\boldsymbol{e}}. \tag{4.10}$$

Результаты выражений (4.9) и (4.10) вычисляют с помощью подстановки символов Веблена:

$$\delta_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{при } i,\ j,\ k = 123,\ 231,\ 312 \\ -1 & \text{при } i,\ j,\ k = 321,\ 213,\ 132 \\ 0 & \text{во всех остальных случаях} \end{cases}$$

Однако иногда для определения роторов (4.9) и (4.10) бывает проще использовать матричную форму записи, вычисляя следующие определители:

$$\underset{\otimes}{\nabla}\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \underset{1}{\boldsymbol{e}} & \underset{2}{\boldsymbol{e}} & \underset{3}{\boldsymbol{e}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \underset{1\otimes 2}{\nabla}\boldsymbol{\Phi} = \begin{vmatrix} \underset{1}{\boldsymbol{e}} & \underset{2}{\boldsymbol{e}} & \underset{3}{\boldsymbol{e}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ T_{1k} & T_{2k} & T_{3k} \end{vmatrix} * \underset{k}{\boldsymbol{e}}.$$

Вспомним, что векторное произведение $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ представляет собой такой вектор, что если его спроецировать на альтернирующий тензор (тензор в правостороннем базисе), то в результате получим выражение $\boldsymbol{ba}-\boldsymbol{ab}$ (определяющее кососимметричный), которое не содержит векторного произведения:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{Э} = \boldsymbol{ba}-\boldsymbol{ab}.$$

Подставив в это равенство вместо вектора $\boldsymbol{a}$ символический вектор ∇, получим векторное уравнение

$$(\nabla\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{Э} = \boldsymbol{b}\nabla-\nabla\boldsymbol{b},$$

содержащие в левой части ротор вектора $\boldsymbol{b}$. Это уравнение удобно использовать в случаях, когда возникает необходимость «избавиться» от ротора. Например, если задано векторное уравнение

$$\underset{\otimes}{\nabla}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0},$$

то после скалярного умножения его левой и правой частей на альтернирующий тензор получим новое уравнение

$$\boldsymbol{b}\nabla - \nabla\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0},$$

оно эквивалентно исходному, но уже не содержит ротора. Несмотря на то, что его валентность на единицу выше, чем исходного уравнения, это уравнение значительно проще записывается в координатной форме: символы Веблена здесь не нужны.

4.10. Дифференцирование произведения функций

При дифференцировании произведения функций производятся операции как при обычном дифференцировании произведения (получается сумма, в каждом из слагаемых которой дифференцируется одна функция), однако при этом следует учитывать необходимость сохранения порядка тензорных операций с функциями. При использовании в выражениях скобок следует помнить, что они играют двоякую роль: определяют, с одной стороны, порядок действий с тензорными объектами и, с другой стороны, границы дифференцирования. Для облегчения записи обычно договариваются, что в записи $\nabla\boldsymbol{ab}$ дифференцированию подлежит только вектор $\boldsymbol{a}$; $\nabla(\boldsymbol{ab})$ – дифференцируется произведение $\boldsymbol{ab}$; $\boldsymbol{a}\nabla\boldsymbol{b}$ и $(\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a}$ – дифференцируется только вектор $\boldsymbol{b}$. Приходится тщательно следить, чтобы в выкладках запись была правильной не только в дифференциальном, но и в тензорном смысле. Например, при раскрытии скобок в выражении $\nabla(\boldsymbol{ab})$ одно слагаемое очевидно: $\nabla\boldsymbol{ab}$ (дифференцируется только первое поле $\boldsymbol{a}$). Во втором слагаемом следует дифференцировать поле $\boldsymbol{b}$, но запись $\boldsymbol{a}\nabla\boldsymbol{b}$, правильная в дифференциальном смысле, неверна в тензорном, так как векторы $\boldsymbol{a}$ и ∇ переставлены. В таких случаях помогает операция транспонирования:

$$\nabla(\boldsymbol{ab}) = \nabla\boldsymbol{ab} + \underset{1\mathrm{T}2}{\boldsymbol{a}\nabla\boldsymbol{b}} = \nabla\boldsymbol{ab} + \underset{\substack{1\mathrm{T}3\\2\mathrm{T}3}}{\boldsymbol{ab}\nabla}.$$

Такая форма записи предполагает, что сначала необходимо производить дифференцирование, а уже после него транспонирование.

Свернем последнее выражение скалярно

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{ab}) = \nabla\cdot\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{a}\cdot\nabla\boldsymbol{b}.$$

Знак транспонирования здесь не нужен. Аналогично,

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \nabla\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \nabla\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a};$$

$$\nabla(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \nabla\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} - \nabla\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}.$$

Пример №6. Вычислить результат выражения $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{T})\cdot\nabla$, если $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ - двухвалентное тензорное поле**.** При раскрытии скобок получим сумму, в каждом из которых слагаемых которой будет дифференцироваться только одно поле. Одно слагаемое получается просто устранением скобок $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{T}\cdot\nabla$, а второе можно записать различными способами, например:

$$\underset{1\circ 3}{\underline{\nabla\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{T}}},\quad \underset{\otimes}{\underline{\boldsymbol{x}\nabla\cdot\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}}},\quad -\underset{1\circ 3}{\underline{\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{x}\nabla}}.$$

Помня, что градиент поля радиус-векторов равен единичному тензору, из второго варианта записи получим

$$\nabla\times(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{T})=\underbrace{\nabla\times\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{0}}\cdot\boldsymbol{T}+\underset{\otimes}{\underline{\nabla\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{T}}}=\underset{\otimes}{\underline{\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{T}}}=\underset{\otimes}{\underline{\boldsymbol{T}}}.$$

Пример №7. Раскрыть скобки в выражении $\nabla\times(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{T})$, где $\boldsymbol{T}$ - постоянный тензор. Поскольку $\boldsymbol{T}$ представляет собой постоянный тензор, дифференцированию подлежит только поле $\boldsymbol{x}$. Простое устранение скобок

$$\nabla\times\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{T}$$

в данном случае нарушает порядок действий в тензорном смысле. Вычисление ротора функции $\boldsymbol{x}$ приводит к тому, что $\boldsymbol{x}$ умножается на ∇, а не на $\boldsymbol{T}$, поэтому правильная запись должна быть следующей:

$$\nabla\times(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{T})=\underset{1\otimes 2}{\underline{\nabla\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{T}}}=\underset{1\otimes 2}{\underline{\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{T}}}=\underset{1\otimes 2}{\underline{\boldsymbol{T}}}.$$

Отметим, что простое устранение скобок дало бы совершенно другой результат:

$$\nabla\times\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{T}=\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{T}=\boldsymbol{0}.$$

Пример №8. Вычислить градиент модуля радиус-вектора. Выразим модуль вектора $\boldsymbol{x}$ через сам вектор и затем вычислим градиент полученного скалярного поля

$$x=\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}.$$

Для вычисления градиента этой сложной функции необходимо сначала продифференцировать степенную функцию, а затем произведение $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$:

$$\nabla x=\nabla(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})^{0,5}=0{,}5(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})^{-0,5}*2\nabla\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=$$

$$=\frac{\nabla\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})^{0,5}}=\frac{\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{x}}{x}=\frac{\boldsymbol{x}}{x}\equiv\boldsymbol{n}.$$

В результате получили, что градиент модуля радиус-вектора есть вектор в направлении $\boldsymbol{x}$ единичной длины, то есть орт радиус-вектора:

$$\nabla x = \frac{\boldsymbol{x}}{x} \equiv \boldsymbol{n}.$$

Этот результат полезно запомнить, так как он имеет значение при решении некоторых задач теории упругости.

4.11. Двукратное дифференцирование

Естественно, что полученные дифференцированием поля можно дифференцировать снова, получая при этом производные более высокого порядка. Правила дифференцирования полей при этом остаются прежними. Валентность получающихся полей определяется тем фактом, что каждый оператор Гамильтона, примененный к тензорной функции, одновалентен. Например,

$$\nabla\nabla\lambda = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k}\underset{i}{\boldsymbol{e}}\underset{k}{\boldsymbol{e}}\lambda = \frac{\partial^2\lambda}{\partial x_i \partial x_k}\underset{i}{\boldsymbol{e}}\underset{k}{\boldsymbol{e}} \equiv \lambda,_{ik}\underset{i}{\boldsymbol{e}}\underset{k}{\boldsymbol{e}}$$

это тензор второй валентности. Он симметричен, так как порядок дифференцирования безразличен. Скалярную свертку этого тензора

$$\nabla\cdot\nabla\lambda = \frac{\partial^2\lambda}{\partial x_i \partial x_k}\underset{i}{\boldsymbol{e}}\cdot\underset{k}{\boldsymbol{e}} = \frac{\partial^2\lambda}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial x_3^2} \equiv \lambda,_{ii}$$

часто обозначают одним символом

$$\nabla\cdot\nabla\lambda \equiv \Delta\lambda,$$

где оператор

$$\Delta = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

имеет специальное название – оператор Лапласа, или лапласиан. Он, как и оператор Гамильтона, совмещает в себе два качества: одновременно является символической скалярной величиной и оператором дифференцирования.

Уравнение

$$\Delta\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$$

называют ***уравнением Лапласа***, а функции $\boldsymbol{f}$ (любой валентности), удовлетворяющие ему, ***гармоническими функциями***. Функции, удовлетворяющие уравнению

$$\Delta\Delta\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0},$$

называют ***бигармоническими***. Как будет показано в следующих разделах курса, в теории упругости эти функции играют значительную роль. Очевидно, что все бигармонические функции одновременно являются и гармоническими:

$$\Delta \underbrace{\Delta f}_{g} = \Delta g = 0,$$

и множество бигармонических функций значительно шире, чем гармонических, так как множество гармонических функций является одним его подмножеством.

Пример №9. Преобразовать тензорное уравнение

$$\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla = \boldsymbol{0}$$

таким образом, чтобы избавиться от роторов (здесь $\boldsymbol{\varepsilon}$ – это симметричное двухвалентное поле).

Сначала для простоты представим тензор $\boldsymbol{\varepsilon}$ в виде диады $\boldsymbol{aa}$ и, воспользовавшись выражением

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{Э} = \boldsymbol{ba} - \boldsymbol{ab},$$

умножим скалярно левую и правую часть исходного уравнения на альтернирующий тензор. Правая часть при этом останется практически неизменной – нулевой тензор лишь изменит валентность со второй на четвертую, а преобразования левой части рассмотрим более подробно:

$$\boldsymbol{Э} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla) \cdot \boldsymbol{Э} = \boldsymbol{Э} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{aa} \times \nabla) \cdot \boldsymbol{Э} =$$
$$= \boldsymbol{Э} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a})(\boldsymbol{a} \times \nabla) \cdot \boldsymbol{Э} = (\boldsymbol{a}\nabla - \nabla \boldsymbol{a})(\nabla \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\nabla) =$$
$$= \boldsymbol{a}\nabla\nabla\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\nabla\boldsymbol{a}\nabla - \nabla\boldsymbol{a}\nabla\boldsymbol{a} + \nabla\boldsymbol{aa}\nabla =$$
$$= \underset{\substack{1\mathrm{T}2 \\ 3\mathrm{T}4}}{\nabla\boldsymbol{aa}\nabla} - \underset{1\mathrm{T}2}{\nabla\boldsymbol{aa}\nabla} - \underset{3\mathrm{T}4}{\nabla\boldsymbol{aa}\nabla} + \nabla\boldsymbol{aa}\nabla = 2(\underset{1\mathrm{T}2}{\nabla\boldsymbol{aa}\nabla} + \nabla\boldsymbol{aa}\nabla)_{3\mathrm{K}4}$$

В результате получили, что исходное двухвалентное выражение равносильно четырехвалентному, которое уже не содержит роторов:

$$(\underset{1\mathrm{T}2}{\nabla\boldsymbol{aa}\nabla} + \nabla\boldsymbol{aa}\nabla)_{3\mathrm{K}4} = \boldsymbol{0}.$$

Для тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$, представляющего собой сумму нескольких диад, преобразования будут аналогичными:

$$\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\underset{1\mathrm{T}2}{\nabla\boldsymbol{\varepsilon}\nabla} + \nabla\boldsymbol{\varepsilon}\nabla)_{3\mathrm{K}4} = \boldsymbol{0}. \tag{4.11}$$

Пример №10. Доказать, что ротор градиента тензорного поля (имеем в виду: левый ротор левого градиента или правый ротор правого градиента) всегда равен нулю.

Докажем равенство нулю левого ротора градиента, рассмотрев для примера двухвалентный тензор $\boldsymbol{T}$ (для тензора произвольной валентности доказательство аналогично).

$$\nabla\times\nabla\boldsymbol{T}=\frac{\partial^2 T_{kn}}{\partial x_i\partial x_j}\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_n=\delta_{ijm}\frac{\partial^2 T_{kn}}{\partial x_i\partial x_j}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_n=$$

$$=\frac{\partial^2 T_{kn}}{\partial x_1\partial x_2}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_n+\frac{\partial^2 T_{kn}}{\partial x_2\partial x_3}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_n+\frac{\partial^2 T_{kn}}{\partial x_3\partial x_1}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_n-$$

$$-\frac{\partial^2 T_{kn}}{\partial x_3\partial x_2}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_n-\frac{\partial^2 T_{kn}}{\partial x_2\partial x_1}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_n-\frac{\partial^2 T_{kn}}{\partial x_1\partial x_3}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{0}.$$

Можно привести более компактное доказательство, если рассмотреть оператор Гамильтона, как обычный вектор. Тогда с учетом того, что $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, получим

$$(\nabla\times\nabla)\boldsymbol{T}=\boldsymbol{0}*\boldsymbol{T}=\boldsymbol{0}.$$

Для правого ротора доказательство будет аналогичным.

Результат этого примера полезно запомнить, так как довольно часто в теории упругости приходится выяснять, например, является ли поле потенциальным. Вспомним, что признаком потенциальности поля является то, что оно является градиентом какого-то другого поля, которое называют потенциалом. Поэтому проверкой потенциальности поля может служить равенство нулю его ротора.

Пример №11. Доказать, что дивергенция ротора двухвалентного тензора всегда равна нулю (имеем в виду: левая дивергенция левого ротора или правая дивергенция правого ротора). Как и в предыдущем примере используем сначала координатную форму записи (для тренировки).

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{T})=\frac{\partial^2 T_{kn}}{\partial x_i\partial x_j}\boldsymbol{e}_i\cdot(\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_n=\delta_{jkm}\frac{\partial^2 T_{kn}}{\partial x_i\partial x_j}\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n=\delta_{jki}\frac{\partial^2 T_{kn}}{\partial x_i\partial x_j}\boldsymbol{e}_n=$$

$$=\frac{\partial^2 T_{2n}}{\partial x_3\partial x_1}\boldsymbol{e}_n+\frac{\partial^2 T_{3n}}{\partial x_1\partial x_2}\boldsymbol{e}_n+\frac{\partial^2 T_{1n}}{\partial x_2\partial x_3}\boldsymbol{e}_n-\frac{\partial^2 T_{2n}}{\partial x_1\partial x_3}\boldsymbol{e}_n-\frac{\partial^2 T_{1n}}{\partial x_3\partial x_2}\boldsymbol{e}_n-\frac{\partial^2 T_{3n}}{\partial x_2\partial x_1}\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{0}.$$

Рассмотрев оператор Гамильтона как обычный вектор, приведем более компактный вариант доказательства. Здесь необходимо учесть геометрический смысл векторного произведения: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$.

$$\nabla\cdot(\underbrace{\nabla\times\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b})=\nabla\cdot(\boldsymbol{c}\boldsymbol{b})=\underbrace{\nabla\cdot\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{0}}\boldsymbol{b}+\underbrace{\boldsymbol{c}\cdot\nabla}_{\boldsymbol{0}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

Доказательство для правой дивергенции ротора аналогично.

Пример №11. Записать систему скалярных уравнений, соответствующих тензорному уравнению

$$\nabla\times\boldsymbol{\varepsilon}\times\nabla=\boldsymbol{0},$$

если $\boldsymbol{\varepsilon}$ – это симметричное двухвалентное поле.

В декартовых координатах получим

$$\nabla\times\boldsymbol{\varepsilon}\times\nabla=\frac{\partial}{\partial x_i}\underset{i}{\boldsymbol{e}}\times\varepsilon_{kl}\underset{k}{\boldsymbol{e}}\underset{l}{\boldsymbol{e}}\times\frac{\partial}{\partial x_m}\underset{m}{\boldsymbol{e}}=\varepsilon_{kl},_{\boldsymbol{im}}\underset{i}{\boldsymbol{e}}\times\underset{k}{\boldsymbol{e}}\underset{l}{\boldsymbol{e}}\times\underset{m}{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{0}.$$

Используя выражение $\underset{i}{\boldsymbol{e}}\times\underset{j}{\boldsymbol{e}}=\delta_{\boldsymbol{ijk}}\underset{k}{\boldsymbol{e}}$, получим

$$\delta_{\boldsymbol{ikr}}\delta_{\boldsymbol{lms}}\varepsilon_{kl},_{\boldsymbol{im}}\underset{r}{\boldsymbol{e}}\underset{s}{\boldsymbol{e}}=f_{rs}\underset{r}{\boldsymbol{e}}\underset{s}{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{0},\qquad f_{rs}=\delta_{\boldsymbol{ikr}}\delta_{\boldsymbol{lms}}\varepsilon_{kl},_{\boldsymbol{im}}.$$

Равенство нулю тензора $\boldsymbol{f}$ соответствует равенству нулю всех его координат f_{rs}. В трехмерном пространстве их девять, но тензор $\boldsymbol{f}$ симметричен ($\boldsymbol{\varepsilon}$ – симметричный тензор, дифференцирование также симметрично); таким образом, получаем шесть уравнений: три для диагональных элементов f_{11}, f_{22}, f_{33} и три для боковых f_{12}, f_{13}, f_{23}. Рассмотрим первую координату

$$f_{11}=\delta_{\boldsymbol{ik}1}\delta_{\boldsymbol{lm}1}\varepsilon_{kl},_{\boldsymbol{im}}=0.$$

Ненулевых чисел $\delta_{\boldsymbol{ik}1}$ только два $\delta_{231}=1$ и $\delta_{321}=-1$. Отсюда получаем, что произведение $\delta_{\boldsymbol{ik}1}\delta_{\boldsymbol{lm}1}$ не равно нулю лишь при следующих наборах чисел i, k, l и m:

$$i,k,l,m=\begin{cases}2,3,2,3;\ \delta_{231}\delta_{231}=1,\\2,3,3,2;\ \delta_{231}\delta_{321}=-1,\\3,2,2,3;\ \delta_{321}\delta_{231}=-1,\\3,2,3,2;\ \delta_{321}\delta_{321}=1.\end{cases}$$

Составляем соответствующую сумму

$$f_{11}=\frac{\partial^2\varepsilon_{32}}{\partial x_2\partial x_3}-\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_2\partial x_2}-\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_3\partial x_3}+\frac{\partial^2\varepsilon_{23}}{\partial x_3\partial x_2}=0.$$

С учетом симметрии тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$ и произвольности порядка дифференцирования это выражение можно упростить:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_3^2}=2\frac{\partial^2\varepsilon_{23}}{\partial x_2\partial x_3}.\qquad(4.12)$$

Еще два уравнения ($f_{22}=0$ и $f_{33}=0$) можно найти путем циклической перестановки индексов:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{21}}{\partial x_2 \partial x_1}, \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1}. \tag{4.13}$$

Аналогично для $f_{12} = \delta_{\boldsymbol{ik}1}\delta_{\boldsymbol{lm}2}\varepsilon_{kl}{,}_{\boldsymbol{im}}$.

$$i,\, k,\, l,\, m = \begin{cases} 2,3,3,1; \ \delta_{231}\delta_{312} = 1, \\ 3,2,3,1; \ \delta_{321}\delta_{312} = -1, \\ 2,3,3,1; \ \delta_{231}\delta_{312} = -1, \\ 3,2,1,3; \ \delta_{321}\delta_{132} = 1, \end{cases}$$

$$f_{12} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{21}}{\partial x_3 \partial x_3} = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left[-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x_3}\right] + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2 \partial x_1} = 0. \tag{4.14}$$

Остальные два уравнения найдем после циклической перестановки индексов:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[-\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1}\right] + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0, \tag{4.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left[-\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2}\right] + \frac{\partial^2 \varepsilon_{2}}{\partial x_3 \partial x_1} = 0.$$

Это решение можно получить проще, если заменить исходное выражение $\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla = \boldsymbol{0}$ равносильным (4.11)

$$(\underset{1\mathrm{T}2}{\nabla\boldsymbol{\varepsilon}\nabla} + \nabla\boldsymbol{\varepsilon}\nabla)_{3\mathrm{K}4} = \boldsymbol{0}.$$

Слагаемыми этого выражения являются четырехвалентные тензоры. Используем координаты i, j, k, l для записи его в координатной форме

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_l}.$$

Это выражение эквивалентно шести скалярным выражениям (4.12) – (4.15).

Пример №12. Найти лапласиан натурального логарифма радиус-вектора. Сначала найдем градиент заданного поля

$$\nabla \ln x = \frac{1}{x}\nabla x = \frac{1}{x} * \frac{\boldsymbol{x}}{x} = \frac{\boldsymbol{x}}{x^2}.$$

Теперь найдем второй градиент заданной функции и затем свернем полученное выражение скалярно

$$\nabla\nabla \ln x = \nabla(x^{-2} * \boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{I}}{x^2} + \frac{2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}{x^4},$$

$$\Delta \ln x = \nabla \cdot \nabla \ln x = \frac{1}{x^2}\underset{\circ}{\boldsymbol{I}} + \frac{2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}{x^4} = \frac{3}{x^2} + \frac{2x^2}{x^4} = \frac{5}{x^2}.$$

4.12. Дифференцирование в декартовых координатах

При практическом использовании всех приведенных понятий и формул, относящихся к дифференцированию тензорных полей, иногда приходится работать не с тензорами, а с их координатами. Наиболее удобно, если введена единая система декартовых координат и все векторы определяются их проекциями на оси декартового базиса. Тогда скалярное поле $\lambda(\boldsymbol{x})$ определяется как скалярная функция трех аргументов $\lambda(x_1, x_2, x_3)$, векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ – как набор трех скалярных функций трех аргументов $a_i(x_k)$, тензорное поле $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ – набор девяти скалярных функций трех аргументов $T_{ij}(x_k)$. При вычислении, скажем, градиента от этих функций мы в первом случае получаем вектор в виде трех его проекций на оси:

$$\nabla\lambda = \frac{\partial\lambda(\boldsymbol{x}_j)}{\partial x_i}\underset{i}{\boldsymbol{e}}, \qquad (\nabla\lambda)_i = \frac{\partial\lambda(\boldsymbol{x}_j)}{\partial x_i},$$

во втором – двухвалентный тензор в виде его девяти координат:

$$\nabla\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_k(\boldsymbol{x}_j)}{\partial x_i}\underset{i}{\boldsymbol{e}}\underset{k}{\boldsymbol{e}}, \quad (\nabla\boldsymbol{a})_{ik} = \frac{\partial a_k(\boldsymbol{x}_j)}{\partial x_i},$$

в третьем случае – трехвалентный тензор в виде его 27 координат:

$$\nabla\boldsymbol{T} = \frac{\partial T_{kn}(\boldsymbol{x}_j)}{\partial x_i}\underset{i}{\boldsymbol{e}}\underset{k}{\boldsymbol{e}}\underset{n}{\boldsymbol{e}}, \qquad (\nabla\boldsymbol{T})_{\boldsymbol{ikn}} = \frac{\partial T_{kn}(\boldsymbol{x}_j)}{\partial x_i}.$$

С помощью координат в заданном базисе можно однозначно определить тензор, поэтому в литературе часто пользуются выкладками и формулами, в которых фигурируют не тензоры, а их проекции на оси некоторого декартового базиса. Например, вместо одного выражения $\boldsymbol{T} = (\nabla\boldsymbol{b})_{\mathrm{S}}$ записывают девять выражений

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(b_{i,j} + b_{j,i}),$$

что описывает способ получения координат тензора $\boldsymbol{T}$ в заданном базисе.

Иногда тензор определяют как набор чисел (например, T_{ij}), изменяющихся при изменении системы координат заданным образом. Например, декартов базис, не меняясь принципиально (оставаясь декартовым), может поворачиваться в пространстве. Такое определение тензора, конечно, затрудняет понимание тензорного исчисления, но вполне достаточно для решения практических задач, хотя и является достаточно громоздким, по сравнению с тензорной формой записи.

4.13. Дифференцирование в полярных координатах

В большом классе практических приложений тензоров иногда удобнее отказаться от декартовой системы координат. Рассмотрим плоскую задачу (двумерное линейное пространство) для одного весьма важного частного случая – системы полярных координат.

Для координирования положения точек плоскости обычно выбирают некоторый полюс $\boldsymbol{O}$ и луч $\boldsymbol{OO'}$ (рис.4.6). Положение произвольной точки $\boldsymbol{A}$ на плоскости определяется ее расстоянием $\boldsymbol{OA} \equiv x$ до полюса и углом φ. Все поля задают в виде функций этих двух координат точки:

$$\lambda(x, \varphi), \quad a_i(x, \varphi), \quad T_{ij}(x, \varphi).$$

Более того, сами проекции a_i, T_{ij} являются проекциями не на некоторый единый базис, а на базис индивидуальный для каждой точки $\boldsymbol{A}$. Вектор $\underset{1}{\boldsymbol{h}}$ направлен вдоль луча $\boldsymbol{OA}$, $\underset{2}{\boldsymbol{h}}$ – перпендикулярен ему и направлен в сторону возрастания φ. Этот базис ортонормирован, поэтому все правила с вычислением проекций произведений тензоров остаются в силе. Но они, разумеется, относятся к произведению тензоров, определенных в одной и той же точке.

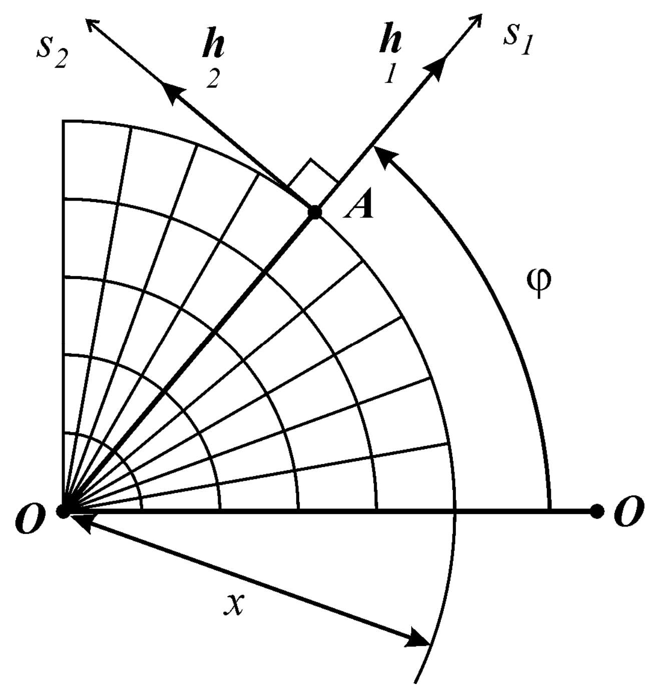

Рис.4.6.Система полярных координат

Сложности начинаются при дифференцировании тензорных полей. Связаны они с тем, что, например, в векторном поле $\boldsymbol{a}(x, \varphi)$ векторы $\boldsymbol{a}(x_1, \varphi_1)$ и $\boldsymbol{a}(x_2, \varphi_2)$ в двух точках поля $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ имеют не только отличающиеся проекции

$$\boldsymbol{a} = a_1 \underset{1}{\boldsymbol{h}} + a_3 \underset{2}{\boldsymbol{h}},$$

но и разные векторы базиса

$$\underset{i}{\boldsymbol{h}} = \underset{i}{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{x}) = \underset{i}{\boldsymbol{h}}(x, \varphi).$$

Например, векторы поля $\boldsymbol{a}(x, \varphi) = 2\underset{1}{\boldsymbol{h}} + \underset{2}{\boldsymbol{h}}$ имеют во всех точках поля одинаковые проекции $(2; 1)$, но этот вектор непостоянен по направлению. Наоборот, постоянный вектор имеет меняющиеся от точки к точке проекции.

Оператор Гамильтона в полярных координатах имеет вид

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial s_i} \underset{i}{\boldsymbol{h}},$$

где s_i – это координатные оси вдоль соответствующих векторов $\underset{i}{\boldsymbol{h}}$ (рис. 4.6). Нетрудно заметить, что

$$ds_1 = dx, \; ds_2 = x d\varphi.$$

Таким образом, в полярных координатах оператор Гамильтона принимает следующий вид:

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \underset{1}{\boldsymbol{h}} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \varphi} \underset{2}{\boldsymbol{h}}. \tag{4.16}$$

Градиент скалярного поля

$$\nabla \lambda(x, \varphi) = \frac{\partial \lambda(x, \varphi)}{\partial x} \underset{1}{\boldsymbol{h}} + \frac{1}{x} \frac{\partial \lambda(x, \varphi)}{\partial \varphi} \underset{2}{\boldsymbol{h}}$$

имеет проекции

$$(\nabla \lambda)_1 = \frac{\partial \lambda(x, \varphi)}{\partial x}, \quad (\nabla \lambda)_2 = \frac{1}{x} \frac{\partial \lambda(x, \varphi)}{\partial \varphi}.$$

Градиент векторного поля вычисляется сложнее с учетом того, что сам базис $\underset{i}{\boldsymbol{h}}$ есть функция координат:

$$\nabla \boldsymbol{a} = \nabla (a_i \underset{i}{\boldsymbol{h}}) = \nabla a_i \underset{i}{\boldsymbol{h}} + a_i \nabla \underset{i}{\boldsymbol{h}}.$$

Поэтому необходимо знать градиенты базисных векторов:

$$\nabla \boldsymbol{h}_i = \boldsymbol{h}_1 \frac{\partial \boldsymbol{h}_i}{\partial x} + \boldsymbol{h}_2 \frac{1}{x} \frac{\partial \boldsymbol{h}_i}{\partial \varphi}.$$

Очевидно, что от длины радиус-вектора базис не зависит, то есть $\partial \boldsymbol{h}_i / \partial x = \boldsymbol{0}$. Рассматривая векторы $\boldsymbol{h}_1$ в двух соседних точках $\boldsymbol{h}_1(\varphi)$ и $\boldsymbol{h}_1(\varphi + d\varphi)$ (рис.4.7), видим, что они отличаются на вектор, направленный вдоль $\boldsymbol{h}_2$ и имеющий длину $d\varphi$. Отсюда

$$\frac{\partial \boldsymbol{h}_1}{\partial \varphi} = \boldsymbol{h}_2.$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial \boldsymbol{h}_2}{\partial \varphi} = -\boldsymbol{h}_1.$$

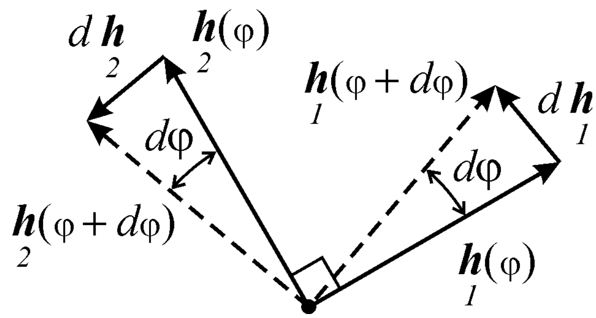

Рис.4.7.Схема изменения базисных векторов

Таким образом, градиенты базисных векторов $\boldsymbol{h}_1$ и $\boldsymbol{h}_2$ в полярных координатах имеют вид:

$$\nabla \boldsymbol{h}_1 = \frac{1}{x} \boldsymbol{h}_2 \boldsymbol{h}_2, \qquad \nabla \boldsymbol{h}_2 = -\frac{1}{x} \boldsymbol{h}_2 \boldsymbol{h}_1. \tag{4.17}$$

Для градиента вектора, следовательно, имеем

$$[\nabla \boldsymbol{a}] = \begin{bmatrix} (\nabla \boldsymbol{a})_{11} & (\nabla \boldsymbol{a})_{12} \\ (\nabla \boldsymbol{a})_{21} & (\nabla \boldsymbol{a})_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial x} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x} \\ \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial a_1}{\partial \varphi} - \dfrac{a_2}{x} & \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial a_2}{\partial \varphi} + \dfrac{a_1}{x} \end{bmatrix}.$$

Для вычисления проекций градиента тензора

$$\nabla \boldsymbol{T} = \nabla (T_{ij} \boldsymbol{h}_i \boldsymbol{h}_j) = \nabla T_{ij} \boldsymbol{h}_i \boldsymbol{h}_j + T_{ij} \nabla (\boldsymbol{h}_i \boldsymbol{h}_j)$$

необходимо иметь градиенты базисных диад. Они вычисляются как градиенты диад:

$$\nabla(\boldsymbol{h}_1\boldsymbol{h}_1) = \nabla\boldsymbol{h}_1\boldsymbol{h}_1 + (\boldsymbol{h}_1\nabla\boldsymbol{h}_1)_{1\mathrm{T}2} = \frac{1}{x}\boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{h}_2\boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_1\boldsymbol{h}_2),$$

$$\nabla(\boldsymbol{h}_1\boldsymbol{h}_2) = \nabla(\boldsymbol{h}_2\boldsymbol{h}_1) = \nabla\boldsymbol{h}_1\boldsymbol{h}_2 + (\boldsymbol{h}_1\nabla\boldsymbol{h}_2)_{1\mathrm{T}2} = \frac{1}{x}\boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{h}_2\boldsymbol{h}_2 - \boldsymbol{h}_1\boldsymbol{h}_1),$$

$$\nabla(\boldsymbol{h}_2\boldsymbol{h}_2) = \nabla\boldsymbol{h}_2\boldsymbol{h}_2 + (\boldsymbol{h}_2\nabla\boldsymbol{h}_2)_{1\mathrm{T}2} = -\frac{1}{x}\boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{h}_1\boldsymbol{h}_2 + \boldsymbol{h}_2\boldsymbol{h}_1).$$

В результате получаем

$$\nabla\boldsymbol{T} = (\frac{\partial T_{ij}}{\partial x}\boldsymbol{h}_1 + \frac{\partial T_{ij}}{x\partial\varphi}\boldsymbol{h}_2)\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{j}} + \frac{T_{11} - T_{22}}{x}\boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{h}_1\boldsymbol{h}_2 + \boldsymbol{h}_2\boldsymbol{h}_1) +$$

$$+\frac{T_{12} + T_{21}}{x}\boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{h}_2\boldsymbol{h}_2 - \boldsymbol{h}_1\boldsymbol{h}_1).$$

При получении формул повторного дифференцирования также необходимо помнить о том, что базисные векторы дифференцируются, как обычные поля. Например,

$$\nabla\nabla\lambda = \nabla(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\boldsymbol{h}_1 + \frac{1}{x}\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\boldsymbol{h}_2) =$$

$$= \nabla\frac{\partial\lambda}{\partial x}\boldsymbol{h}_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial x}\nabla\boldsymbol{h}_1 + \nabla(\frac{1}{x}\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi})\boldsymbol{h}_2 + \frac{1}{x}\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\nabla\boldsymbol{h}_2.$$

Используя выражения (4.16) и (4.17), получаем

$$[\nabla\nabla\lambda] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} & \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial\varphi} - \dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial\lambda}{\partial\varphi} \\ \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial\varphi} - \dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial\lambda}{\partial\varphi} & \dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial\varphi^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial\lambda}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

Лапласиан получается скалярным свертыванием двойного градиента

$$\Delta = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \equiv \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial s_2^2}.$$

4.14. Контрольные вопросы для закрепления материала

Вопросы для закрепления материала

- Что такое радиус-вектор?
- Как связаны между собой валентность функции и валентность ее дифференциала? А валентность функции с валентностью ее производной?
- Что в тензорном анализе называют «полем»?
- Что такое поверхности уровня?
- Каким образом можно изобразить на плоскости скалярное поле? Векторное? Тензорное?
- Что такое направленная производная скалярного поля?
- Как вычислить направленную производную тензорного поля? Какова ее валентность по сравнению с валентностью самого поля?
- Что представляет собой оператор Гамильтона?
- Что такое градиент?
- Как соотносятся между собой валентности тензорного поля и поля его градиентов?
- Какова связь между дифференциалом тензор-функции и дифференциалом ее аргумента?
- Что называют дивергенцией? Как соотносятся между собой валентности тензорного поля и поля его дивергенций?
- Что такое ротор тензорного поля? Как соотносятся между собой валентности тензорного поля и поля его роторов?
- Какие поля называются потенциальными? Какие варианты проверки на потенциальность вам известны?
- Чему равен градиент радиус-вектора?
- Чему равен ротор радиус-вектора?
- Чему равна дивергенция радиус-вектора?
- В чем состоят правила дифференцирования произведения функций?
- Чему равен градиент модуля радиус-вектора?
- Чему равен ротор градиента тензорного поля?
- Чему равна дивергенция ротора тензорного поля?
- Как связаны между собой левый и правый градиенты двухвалентного тензорного поля?
- Чему равен ротор градиента тензорного поля?
- Чему равна дивергенция ротора тензорного поля?
- Что такое оператор Лапласа? Какова тензорная и координатная форма записи этого оператора?
- Какие тензорные функции называют гармоническими? Бигармоническими?
- Что представляет собой система полярных координат?
- Как в системе полярных координат определяют положение точки пространства?

- В чем особенность дифференцирования тензорных функций в полярных координатах?
- Какова координатная форма записи оператора Гамильтона в полярных координатах?
- Чему равны градиенты базисных векторов в полярной системе координат?
- Какова координатная форма записи оператора Лапласа в полярных координатах?

Задачи для самостоятельного решения

- Изобразить линии уровня скалярного поля $\lambda(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$. Каковы поверхности уровня этого поля?
- Что представляют собой поверхности уровня скалярного поля $\lambda(\boldsymbol{x}) = \mu + \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{x}$, если $\boldsymbol{t}$ – постоянный вектор? Вычислить градиент этого поля.
- Дано скалярное поле $\lambda(\boldsymbol{x}) = 3x$. Требуется в точке $\boldsymbol{x} = 4\underset{1}{\boldsymbol{e}} + 3\underset{2}{\boldsymbol{e}}$ найти направленную производную в направлении $\boldsymbol{k} = \underset{1}{\boldsymbol{e}} - 3\underset{2}{\boldsymbol{e}}$.
- Вычислить градиенты функций: ∇x_i; $\nabla(\boldsymbol{k}\boldsymbol{x})$; $\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x})$, если $\boldsymbol{k}$ – постоянный вектор, а $\boldsymbol{A}$ – постоянный двухвалентный тензор.
- Проверить, является ли функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = x^{-3}\boldsymbol{k}$ гармонической, если $\boldsymbol{k}$ – постоянный вектор.
- Упростить выражение $\nabla\nabla \cdot\cdot (\lambda \boldsymbol{I}) = 0$, если λ – скаляр.
- Упростить выражение $\nabla \times (\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{x})$ и $\nabla \cdot (\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{x})$, если $\boldsymbol{T}$ – постоянный двухвалентный тензор.
- Вычислить дивергенцию поля $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2^2 \underset{1}{\boldsymbol{e}}\underset{1}{\boldsymbol{e}} - x_3^2 (\underset{1}{\boldsymbol{e}}\underset{2}{\boldsymbol{e}} + \underset{2}{\boldsymbol{e}}\underset{1}{\boldsymbol{e}}) + 6 x_3 \underset{3}{\boldsymbol{e}}\underset{3}{\boldsymbol{e}}$.
- Вычислить ротор поля $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = -x_1^3 \underset{1}{\boldsymbol{e}}\underset{1}{\boldsymbol{e}} + x_2 x_3 (\underset{3}{\boldsymbol{e}}\underset{2}{\boldsymbol{e}} + \underset{2}{\boldsymbol{e}}\underset{3}{\boldsymbol{e}}) - 8 x_2 \underset{3}{\boldsymbol{e}}\underset{3}{\boldsymbol{e}}$.
- Равен ли нулю ротор ротора тензорного поля?
- Проверить, является ли векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) = x_1 \underset{1}{\boldsymbol{e}} + x_1 x_2 \underset{2}{\boldsymbol{e}} - x_1 x_2 x_3 \underset{3}{\boldsymbol{e}}$ потенциальным.
- Проверить, является ли поле $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = x_1 \underset{1}{\boldsymbol{e}}\underset{1}{\boldsymbol{e}} + x_1 x_2 (\underset{1}{\boldsymbol{e}}\underset{2}{\boldsymbol{e}} - \underset{1}{\boldsymbol{e}}\underset{2}{\boldsymbol{e}}) - x_3^2 \underset{3}{\boldsymbol{e}}\underset{3}{\boldsymbol{e}}$ потенциальным.
- Доказать, что градиент скалярной свертки двухвалентного тензора равен скалярной свертке его градиента. Верно ли это утверждение в случае векторной свертки?
- Найти лапласиан скалярного поля $\mu(\boldsymbol{x}) = x^{-1}$.