

### 3. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ОДНОРОДНОМ НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ

Прежде чем переходить к более сложному разделу математики – тензорному анализу (который включает в себя тензорное дифференцирование и тензорное интегрирование), применим уже накопленные знания тензорного аппарата к механике на примере упругого твердого тела, находящегося в состоянии однородной деформации.

В этой главе будем рассматривать только сплошные однородные и изотропные тела, испытывающие малые деформации. С учетом использованных допущений определим основные тензоры в механике: тензор напряжений, тензор дисторсии, тензор деформации, тензор жесткого поворота, тензоры геометрических характеристик, а также определим тензор констант упругости и закона Гука для линейно-упругого изотропного тела.

#### 3.1. Тензор напряжений

Рассмотрим равновесное состояние произвольного твердого тела (из идеально-упругого материала), нагруженного внешними силами таким образом, что во всех его элементарных объемах на одинаковых площадках действуют одинаковые внутренние силы. Такое напряженное состояние тела называют *однородным*. Для рассмотрения напряженно-деформированного состояния этого тела можно выбрать любую его часть любого размера.

*Напряжением*  $\mathbf{p}$  называют интенсивность силы, передающейся через некоторую площадку с единичной нормалью  $\mathbf{n}$  от одной части тела к другой, отделенной мысленно этой площадкой, как показано на рис.3.1. Вспомним, что по третьему закону Ньютона силы взаимодействия между частями тела должны быть равны по величине и противоположны по направлению:

$$\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1.$$

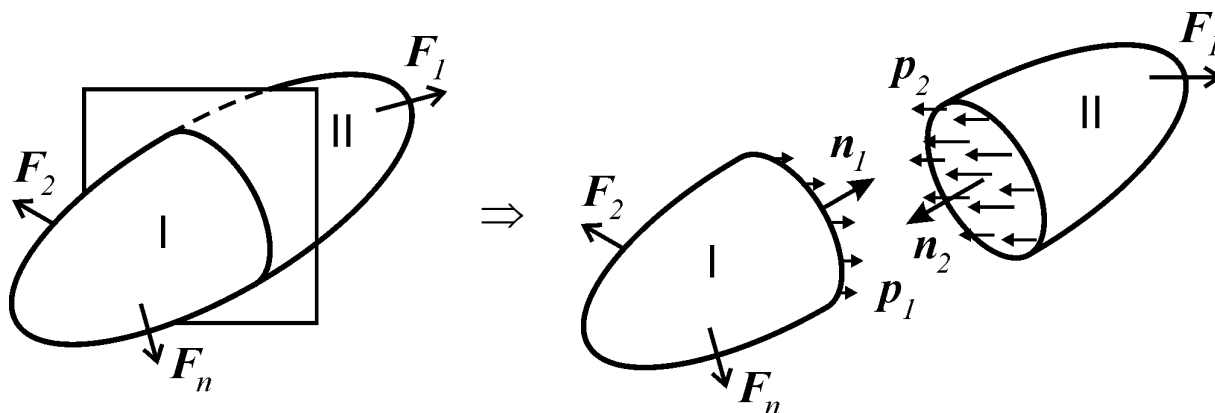


Рис.3.1. Иллюстрация напряжений, возникающих в упругом твердом теле

Выделим рассматриваемого внутри тела некоторый элемент объема (рис.3.2), проведя через него четыре непараллельных сечения с наружными единичными нормальными  $\mathbf{n}_i$  ( $i = 1 \dots 4$ ). Площади граней полученного в результате четырехгранника обозначим  $S_i$ , а напряжения на соответствующих гранях соответственно обозначим  $\mathbf{p}_i$ .

Согласно методу сечений, так как все тело находится в равновесии под действием внешних сил, то и любой элемент его объема должен находиться в равновесии под действием внешних и внутренних сил. Это означает, что рассматриваемый четырехгранник должен находиться в равновесии под действием системы напряжений, действующих на его гранях. Рассмотрим сначала *условие равновесия по силам*:

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{p}_1 S_1 + \mathbf{p}_2 S_2 + \mathbf{p}_3 S_3 + \mathbf{p}_4 S_4 = \mathbf{0}.$$

Из этого выражения следует, что напряжение на одной из площадок можно выразить через напряжения на трех остальных площадках:

$$\mathbf{p}_4 = -\frac{S_1}{S_4} \mathbf{p}_1 - \frac{S_2}{S_4} \mathbf{p}_2 - \frac{S_3}{S_4} \mathbf{p}_3 = -\frac{S_i}{S_4} \mathbf{p}_i.$$

Вектор  $\mathbf{p}_4$  представляет собой линейную форму трех векторов  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$  и  $\mathbf{p}_3$ , коэффициенты которой зависят только от соотношения площадей граней рассматриваемого тетраэдра. Варьируя положение четвертой площадки, можно найти напряжения на абсолютно всех площадках, проведенных в теле. Следовательно, напряженное состояние однозначно определяется тремя векторами напряжений  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$  и  $\mathbf{p}_3$  на трех произвольных площадках. Удобнее всего для этой цели использовать три ортогональные площадки (рис.3.3), обозначим их нормали  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$  (они послужат ортами декартова базиса), нормаль к четвертой площадке обозначим просто  $\mathbf{n}$ , а ее площадь –  $S$ . Условие равновесия по силам в этом случае примет вид:

$$\mathbf{p} = -\frac{S_1}{S} \mathbf{p}_1 - \frac{S_2}{S} \mathbf{p}_2 - \frac{S_3}{S} \mathbf{p}_3 = -\frac{S_i}{S} \mathbf{p}_i$$

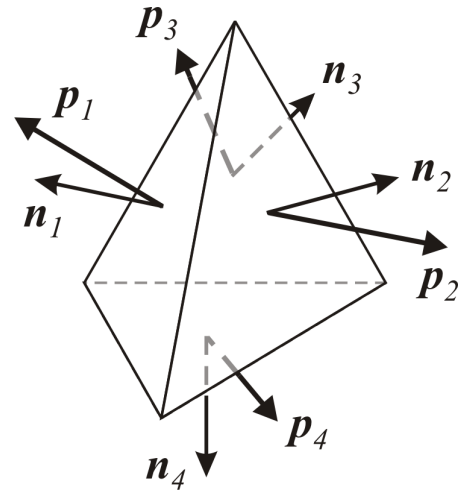


Рис.3.2. Произвольный элемент объема

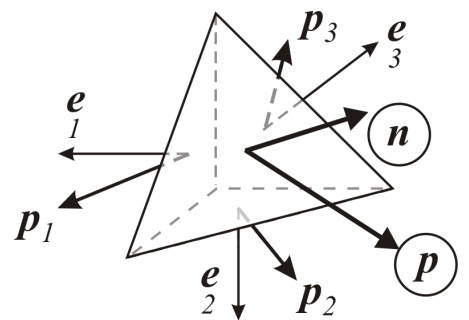


Рис.3.3. Элемент объема, определенный тремя взаимортогональными плоскостями

В этом выражении  $S_i = -S \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

После подстановки последнего выражения в предыдущее получим

$$\mathbf{p} = p_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}.$$

В этом выражении объект

$$p_i \mathbf{e}_i \equiv \boldsymbol{\sigma},$$

представляющий собой двухвалентный тензор, называют тензором напряжений. Таким образом, определение тензора напряжений можно сформулировать так: **тензор напряжений** – это такой тензор, что если его скалярно умножить на единичную нормаль к площадке, то получим вектор полного напряжения на этой площадке:

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}. \quad (3.1)$$

В частности, напряжения на базисных площадках равны  $\mathbf{p}_k = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_k = p_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k$ .

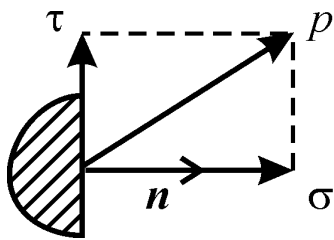


Рис.3.4. Векторы напряжений на площадке с нормалью  $\mathbf{n}$

Напряжения (нормальное  $\boldsymbol{\sigma}$  и касательное  $\boldsymbol{\tau}$ ) на площадке с нормалью  $\mathbf{n}$  показаны на рис.3.4. и равны по величине соответственно:

$$|\boldsymbol{\sigma}| = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \mathbf{n},$$

$$|\boldsymbol{\tau}| = \sqrt{p^2 - |\boldsymbol{\sigma}|^2} = \sqrt{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})^2 - |\boldsymbol{\sigma}|^2}.$$

Векторы этих напряжений:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \mathbf{n} \mathbf{n}, \quad \bar{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{p} - \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}.$$

Введем следующие обозначения:  $\sigma_{ij}$  – напряжение на площадке с нормалью  $j$  вдоль направления  $i$  (рис.3.5). Если  $i = j$ , то  $\sigma_{ii}$  – это нормальные напряжения, а если  $i \neq j$ , то  $\sigma_{ij} \equiv \tau_{ij}$  – это касательные напряжения.

Матрица тензора напряжений имеет вид:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

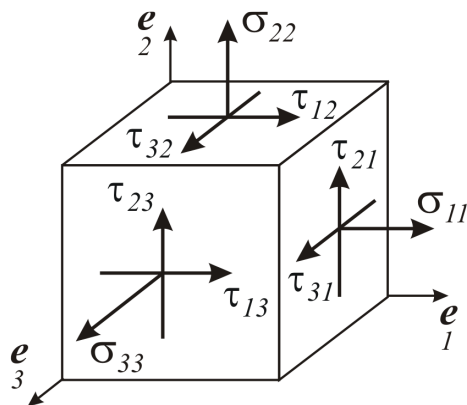


Рис.3.5. Напряжения на взаимортогональных площадках

Отметим, что столбцы этой матрицы представляют собой полные напряжения на соответствующих базисных площадках

$$[\boldsymbol{\sigma}] = [[p_1] \quad [p_2] \quad [p_3]].$$

Пусть сторона куба, изображенного на рис.3.5, равна единице, тогда *условие равновесия* этого куба *по моментам* имеет вид:

$$\mathbf{M} = \mathbf{e}_i \times \mathbf{p}_i = -(\mathbf{p}_i \mathbf{e}_i)_{\otimes} = -\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}.$$

Последний знак равенства означает, что тензор напряжений симметричен, откуда следует закон парности касательных напряжений:

$$\tau_{ji} = \tau_{ij}.$$

Перечислим *основные виды напряженных состояний*:

- *Одноосное напряженное состояние:  $\boldsymbol{\sigma} = p\mathbf{I}$ .*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad - \text{ ранг равен единице.}$$

- *Плоское напряженное состояние:  $\boldsymbol{\sigma} = \lambda_1 \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_2$ ,*

здесь  $\lambda_i$  – главные напряжения тензора  $\boldsymbol{\sigma}$  (причем,  $\lambda_3 = 0$ );  $\mathbf{n}_i$  – главные направления такие, что  $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_i = 0$ , а  $\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_i$ .

$$\begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & -10 \end{bmatrix} \quad - \text{ ранг равен двум.}$$

- *Шаровое напряженное состояние:  $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}$ , где  $p$  – давление.*

$$\begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad - \text{ ранг равен трем.}$$

- *Чистый сдвиг:  $\boldsymbol{\sigma} = \tau(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_2) = \tau(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)$ ,  $\mathbf{t}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}_1 \pm \mathbf{n}_2)$  (частный случай плоского напряженного состояния).*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -7 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \text{ранг равен двум.}$$

- *Цилиндрическое напряженное состояние:*  $\boldsymbol{\sigma} = \lambda \tilde{\mathbf{I}}$  (ранг равен двум),  $\tilde{\mathbf{I}} \equiv \mathbf{I} - \mathbf{nn}$ , где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор вдоль оси цилиндра (плоское напряженное состояние).

Например, если  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2$ , то  $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ .

### 3.2. Тензор дисторсии

*Материальное волокно* – это совокупность материальных точек среды, лежащих на некоторой линии. Ограничимся рассмотрением прямых волокон, которые определяются двумя точками: началом и концом. Рассмотрим некоторое материальное волокно в двух состояниях: начальном и деформированном. Положение точки тела в начальном состоянии будем определять радиус-вектором  $\mathbf{x}$ , а положение этой же точки после деформации тела – радиус-вектором  $\mathbf{r}$  (рис.3.6).

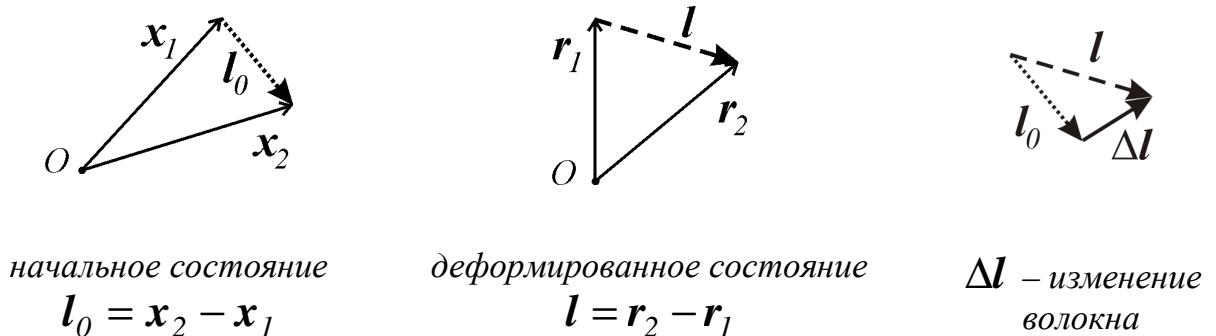


Рис.3.6. Изменение материального волокна

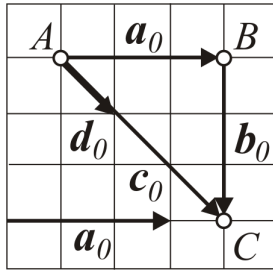
*Однородность деформированного состояния* означает, что любое множество начальных волокон, которым отвечает один вектор  $\mathbf{l}_0$ , переходит во множество деформированных волокон, которым отвечает также единственный вектор  $\mathbf{l}$ . Этот вектор является функцией начального вектора

$$\mathbf{l} = \mathbf{f}(\mathbf{l}_0).$$

На рис. 3.7 показана однородная деформация, в результате которой начальные волокна  $\mathbf{a}_0$ ,  $\mathbf{b}_0$ ,  $\mathbf{c}_0$  и  $\mathbf{d}_0$  превратились в волокна  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$  соответственно:

$$\mathbf{a} = \mathbf{f}(\mathbf{a}_0), \mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{b}_0), \mathbf{c} = \mathbf{f}(\mathbf{c}_0), \mathbf{d} = \mathbf{f}(\mathbf{d}_0).$$

начальное состояние



деформированное состояние

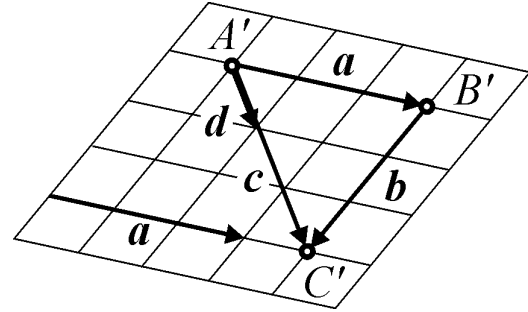


Рис.3.7. Однородная деформация

Заметим следующее:

$$\underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0)}_c = \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{a}_0)}_a + \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{b}_0)}_b \quad \text{и} \quad \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{c}_0)}_c = \mathbf{f}(\lambda \mathbf{d}_0) = \lambda \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{d}_0)}_d.$$

Отсюда следует линейность функции  $\mathbf{f}$  при однородной деформации. А это значит, что существует линейный оператор функции  $\mathbf{f}$  – тензор, который обозначают  $\mathbf{F}$  :

$$\mathbf{l} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{l}_0.$$

Изменение волокна равно:

$$\Delta \mathbf{l} = \mathbf{l} - \mathbf{l}_0 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{l}_0 - \mathbf{l}_0 = \mathbf{D} \cdot \mathbf{l}_0.$$

В этом выражении двухвалентный тензор

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{F} - \mathbf{I}$$

представляет собой **тензор дисторсии**. Таким образом, определение тензора дисторсии можно сформулировать следующим образом: тензор дисторсии – это такой двухвалентный тензор, что если его скалярно умножить на вектор начального волокна  $\mathbf{l}$ , то получим изменение этого вектора  $\Delta \mathbf{l}$  :

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{l} = \Delta \mathbf{l}. \quad (3.2)$$

Тензор дисторсии в координатной форме может быть представлен в виде суммы трех диад:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{D} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{D} \cdot (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) = \underbrace{(\mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_1)}_{d_1} \mathbf{e}_1 + \underbrace{(\mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_2)}_{d_2} \mathbf{e}_2 + \underbrace{(\mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_3)}_{d_3} \mathbf{e}_3 = \\ &= d_i \mathbf{e}_i = d_1 \mathbf{e}_1 + d_2 \mathbf{e}_2 + d_3 \mathbf{e}_3 \quad (\text{координаты – векторы}); \end{aligned}$$

или в виде суммы девяти диад:

$$\mathbf{D} = d_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \text{ (координаты – скаляры).}$$

Матрица тензора дисторсии имеет вид:

$$[\mathbf{D}] = [[\mathbf{d}_1] \quad [\mathbf{d}_2] \quad [\mathbf{d}_3]] = \begin{bmatrix} d_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & d_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & d_{33} \end{bmatrix}.$$

Здесь векторы  $\mathbf{d}_1$ ,  $\mathbf{d}_2$  и  $\mathbf{d}_3$  – это изменения базисных векторов соответственно (по-другому их называют первой, второй и третьей проекциями тензора дисторсии):

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_i = \Delta \mathbf{e}_i;$$

$d_{ii}$  – это относительное удлинение (укорочение) волокна, определяемого вектором  $\mathbf{e}_i$  ортонормированного базиса;  $\alpha_{ij}$  ( $i \neq j$ ) – угол поворота волокна  $\mathbf{e}_i$  в направлении  $\mathbf{e}_j$ . Углы  $\alpha_{ij}$  и  $\alpha_{ji}$  в сумме образуют угол сдвига  $\gamma$  в плоскости  $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\}$ :  $\gamma = \alpha_{ij} + \alpha_{ji}$ .

Вспомним, что любой тензор можно единственным образом разложить на симметричную и кососимметричную часть. Если смещения материальных точек тела малы, то *кососимметричная часть тензора дисторсии*  $\boldsymbol{\omega}$  характеризует поворот тела, как жесткого целого; а *симметричная часть*  $\boldsymbol{\varepsilon}$  определяет деформации в теле:

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{D}_K = \frac{1}{2}(\mathbf{D} - \mathbf{D}_T), \quad \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \mathbf{D}_S = \frac{1}{2}(\mathbf{D} + \mathbf{D}_T).$$

*Пример №1.* Для дисторсии, изображенной на рис.3.8, записать тензор дисторсии, а также тензоры деформации и жесткого поворота. В расчетах учесть, что угол  $\gamma$  – малая величина. Изобразить на плоскости заданную дисторсию, как сумму деформации и жесткого поворота.

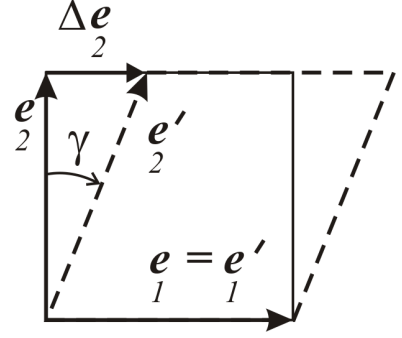
Решение. Тензор дисторсии в проекциях имеет вид:

$$\mathbf{D} = d_i \mathbf{e}_i = d_1 \mathbf{e}_1 + d_2 \mathbf{e}_2.$$

Запишем векторы  $\mathbf{d}_i$  (в координатной и матричной форме):

$$\mathbf{d}_1 = \Delta \mathbf{e}_1 = \mathbf{0}; \quad [\mathbf{d}_1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d}_2 = \Delta \mathbf{e}_2 = \left| \begin{matrix} \gamma \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{matrix} \right| = \gamma \mathbf{e}_1; \quad [\mathbf{d}_2] = \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \end{bmatrix}.$$



В результате получим тензор дисторсии (в координатной и матричной форме):

Рис.3.8. Плоская дисторсия

$$\mathbf{D} = \mathbf{d}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{d}_2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{0} + \gamma \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \gamma \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \quad [\mathbf{D}] = [[\mathbf{d}_1] \quad [\mathbf{d}_2]] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

а также тензоры деформации и жесткого поворота соответственно:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_S = \frac{1}{2}(\mathbf{D} + \mathbf{D}^T) = \frac{1}{2} \gamma (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1), \quad [\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma/2 \\ \gamma/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{D}_K = \frac{1}{2}(\mathbf{D} - \mathbf{D}^T) = \frac{1}{2} \gamma (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1), \quad [\boldsymbol{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma/2 \\ -\gamma/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теперь можно изобразить заданную дисторсию, как суперпозицию деформации и жесткого поворота (рис.3.9).

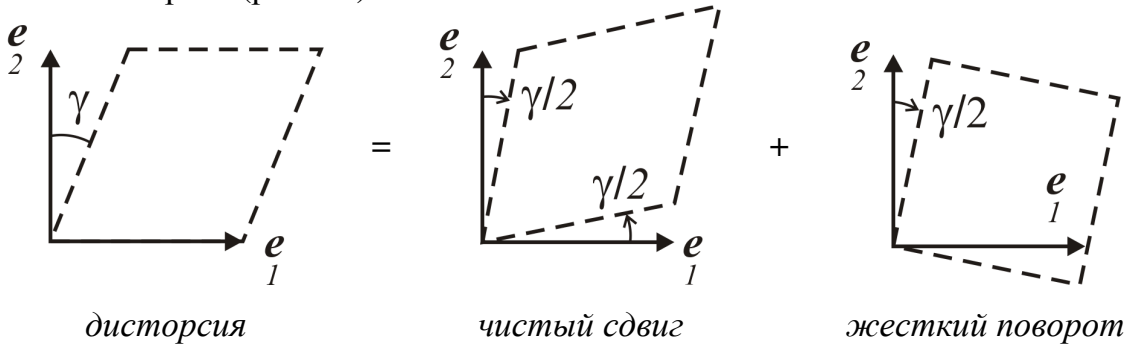


Рис.3.9. Дисторсия, как суперпозиция деформации (чистого сдвига) и жесткого поворота

Заметим, что при сложении тензора деформации и тензора поворота тела, как жесткого целого получим исходный тензор дисторсии:

$$\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \gamma (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) + \frac{1}{2} \gamma (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) = \gamma \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \mathbf{D}.$$

### 3.3. Тензор деформации

**Тензор деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}$**  – это симметричная часть тензора дисторсии:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underset{S}{\boldsymbol{D}} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \quad (3.3)$$

Вспомним, что в ортонормированном базисе  $\{\mathbf{e}_i\}$  тензор деформаций может быть представлен также в виде суммы трех диад:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{I} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) = \\ &= \underbrace{(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_1)}_{\boldsymbol{\varepsilon}_1} \mathbf{e}_1 + \underbrace{(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_2)}_{\boldsymbol{\varepsilon}_2} \mathbf{e}_2 + \underbrace{(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_3)}_{\boldsymbol{\varepsilon}_3} \mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\varepsilon}_1 \mathbf{e}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \mathbf{e}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3 \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Здесь  $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_3$  – это первая, вторая и третья проекции тензора  $\boldsymbol{\varepsilon}$  соответственно (векторные величины).

Матрица тензора деформации имеет вид:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = [[\boldsymbol{\varepsilon}_1] \quad [\boldsymbol{\varepsilon}_2] \quad [\boldsymbol{\varepsilon}_3]] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}.$$

Здесь координата  $\varepsilon_{ii}$  – это относительное удлинение волокна, определяемого вектором  $\mathbf{e}_i$  ортонормированного базиса;  $\varepsilon_{ij}$  ( $i \neq j$ ) – это угол поворота волокна  $\mathbf{e}_j$  в плоскости  $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\}$ . Из симметрии тензора деформаций следует, что сдвиги всегда подчиняются закону парности  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$  – это взаимный угол поворота волокон  $\mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{e}_j$ . Таким образом, матрицу тензора деформации можно записать в следующем виде:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \gamma_{12}/2 & \gamma_{13}/2 \\ \gamma_{21}/2 & \varepsilon_{22} & \gamma_{23}/2 \\ \gamma_{31}/2 & \gamma_{32}/2 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix},$$

где  $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$  – угол сдвига (изменение прямого угла).

Рассмотрим случай, когда поворот тела, как жесткого целого отсутствует  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ , тогда изменение положения любого волокна в теле полностью определяется тензором деформаций  $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\varepsilon}$ .

Для волокна, положение которого в начальном состоянии определяется вектором  $\mathbf{a}_0$ , изменение этого вектора  $\Delta\mathbf{a}$  можно найти следующим образом (рис.3.10):

$$\Delta\mathbf{a} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{a}_0.$$

В частности, векторы  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$  представляют собой изменения базисных векторов:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_i = \Delta \mathbf{e}_i.$$

Новое положение заданного волокна:

$$\mathbf{a} = \Delta\mathbf{a} + \mathbf{a}_0 = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0 = (\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{I}) \cdot \mathbf{a}_0.$$

Удлинение (или укорочение) заданного волокна:  $\Delta l_{a0} \approx \Delta\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{a}\mathbf{i}$ , где  $\mathbf{i}$  – единичный вектор в направлении  $\mathbf{a}$  (или  $\mathbf{a}_0$ , так как деформации малы):

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \approx \frac{\mathbf{a}_0}{|\mathbf{a}_0|}.$$

Относительное удлинение заданного волокна:  $\boldsymbol{\varepsilon}_{a0} = \frac{\Delta l_{a0}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{a}\mathbf{i}}{|\mathbf{a}|} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{i}\mathbf{i}$ .

Угол поворота волокна:  $\alpha_{a0} \approx \frac{\Delta\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_\perp}{|\mathbf{a}|} = \frac{(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{i}_\perp}{|\mathbf{a}|} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{i}\mathbf{i}_\perp$ ,

где  $\mathbf{i}_\perp = -\mathfrak{A}_3 \cdot \mathbf{i}$  это единичный вектор в плоскости поворота волокна, ортогональный начальному вектору, а тензор

$$\mathfrak{A}_3 = \begin{matrix} \mathbf{e} & \mathbf{e} \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ \mathbf{e} & \mathbf{e} \end{matrix}$$

представляет собой тензор поворота на  $90^\circ$  против часовой стрелки (в правом декартовом базисе).

Теперь перечислим *основные инварианты тензора деформации*:

- объемная деформация:  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ii} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{I} \approx \frac{DV}{V}$ ,
- средняя деформация:  $\boldsymbol{\varepsilon} / 3 \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_0$ ;

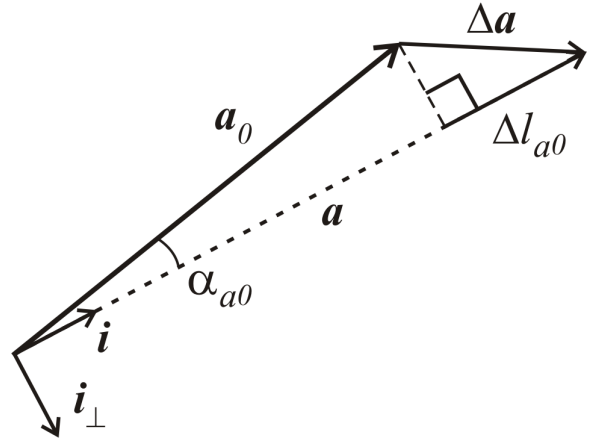


Рис.3.10. Дисторсия в отсутствие жесткого поворота

- относительное изменение площади площадки с нормалью  $\mathbf{n}$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{nn}) \approx \frac{DS}{S};$$

- главные деформации:  $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_2$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ .

### 3.4. Тензор жесткого поворота

*Тензор жесткого поворота*  $\boldsymbol{\omega}$  – это кососимметричная часть тензора дисторсии

$$\boldsymbol{\omega} = \underset{\text{К}}{\mathbf{D}} = \omega_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \quad (3.4)$$

В ортонормированном базисе  $\{\mathbf{e}_i\}$  тензор жесткого поворота может быть представлен также в виде суммы трех диад:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3,$$

где  $\boldsymbol{\omega}_1$ ,  $\boldsymbol{\omega}_2$ ,  $\boldsymbol{\omega}_3$  – это первая, вторая и третья проекции тензора  $\boldsymbol{\omega}$  соответственно (векторные величины).

Матрица тензора жесткого поворота имеет вид:

$$[\boldsymbol{\omega}] = [[\boldsymbol{\omega}_1] \quad [\boldsymbol{\omega}_2] \quad [\boldsymbol{\omega}_3]] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\omega_{ij}$  – это угол поворота тела, как жесткого целого в плоскости  $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\}$  от вектора  $\mathbf{e}_i$  к вектору  $\mathbf{e}_j$ . Так как тензор жесткого поворота кососимметричен, то его матрица тоже обладает косой симметрией:

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}.$$

Рассмотрим случай, когда деформация отсутствует  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$ , тогда изменение положения любого волокна в теле полностью определяется тензором его поворота, как жесткого целого  $\mathbf{D} = \boldsymbol{\omega}$ .

Для волокна, положение которого в начальном состоянии определяется вектором  $\mathbf{a}_0$ , изменение этого вектора  $\Delta \mathbf{a}$  можно найти следующим образом:

$$\Delta \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{a}_0.$$

В частности, векторы  $\boldsymbol{\omega}_i$  представляют собой изменения базисных векторов:

$$\omega_i = \omega \cdot e_i = \Delta e_i.$$

Новое положение заданного вектора:

$$\mathbf{a} = \Delta \mathbf{a} + \mathbf{a}_0 = \omega \cdot \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0 = (\omega + \mathbf{I}) \cdot \mathbf{a}_0.$$

Вектор, определяющий ось, вокруг которой происходит поворот, можно найти с использованием следующего выражения для кососимметричного тензора (оно было получено ранее в разделе «векторное свертывание»:  $2\bar{\omega} = -\mathbf{K}$ ):

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= -\frac{1}{2} \omega = -\frac{1}{2} (\underbrace{\omega_{11}}_0 e_1 \times e_1 + \omega_{12} e_1 \times e_2 + \omega_{13} e_1 \times e_3 + \\ &+ \omega_{21} e_2 \times e_1 + \underbrace{\omega_{22}}_0 e_2 \times e_2 + \omega_{23} e_2 \times e_3 + \omega_{31} e_3 \times e_1 + \omega_{32} e_3 \times e_2 + \underbrace{\omega_{33}}_0 e_3 \times e_3) = \\ &= -\frac{1}{2} (\omega_{12} e_3 - \omega_{13} e_2 - \underbrace{\omega_{21}}_{-\omega_{12}} e_3 + \omega_{23} e_1 + \underbrace{\omega_{31}}_{-\omega_{13}} e_2 - \underbrace{\omega_{32}}_{-\omega_{23}} e_1) = \\ &= -\frac{1}{2} (2\omega_{12} e_3 - 2\omega_{13} e_2 + 2\omega_{23} e_1) = -\omega_{12} e_3 + \omega_{13} e_2 - \omega_{23} e_1. \end{aligned}$$

Угол поворота тела:

$$\omega = |\bar{\omega}| = \sqrt{\omega_{12}^2 + \omega_{13}^2 + \omega_{23}^2}.$$

Отметим также, что удлинение заданного вектора отсутствует:  $\Delta l_{a_0} = 0$ , поскольку при повороте тела, как жесткого целого длины векторов не меняются  $|\mathbf{a}_0| = |\mathbf{a}|$ .

### 3.5. Тензоры геометрических характеристик сечения

Рассмотрим твердое тело массой  $m$  и центром тяжести в точке  $C$  (рис.3.11). **Вектор статического момента** этого тела представляет собой следующее:

$$\mathbf{S} = \int_m \mathbf{r} dm.$$

С использованием теоремы о среднем можно переписать последнее выражение следующим образом:

$$\mathbf{S} = \mathbf{r}_c m.$$

Статический момент тела относительно оси  $X$  – это проекция тензора  $\mathbf{S}$  на ось  $X$  (отметим, что в сопротивлении материалов приняты другие обозначения):

$$S_x = \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_1 = m \mathbf{r}_c \cdot \mathbf{e}_1 = m x_c.$$

Аналогично,

$$S_y = \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_2 = m \mathbf{r}_c \cdot \mathbf{e}_2 = m y_c,$$

$$S_z = \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_3 = m \mathbf{r}_c \cdot \mathbf{e}_3 = m z_c.$$

Матрица вектора статического момента тела имеет вид:

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{bmatrix} = m [\mathbf{r}_c].$$

Тензор момента инерции тела:

$$\mathbf{J} = \int_m \mathbf{r} \mathbf{r} dm.$$

Момент инерции тела относительно оси  $X$  представляет собой двойную проекцию тензора  $\mathbf{J}$  на ось  $X$ :

$$J_x = \mathbf{J} \cdot \cdot \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 = \int_m \mathbf{r} \mathbf{r} \cdot \cdot \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 dm = \int_m x^2 dm.$$

Аналогично,

$$J_y = \mathbf{J} \cdot \cdot \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 = \int_m y^2 dm, \quad J_z = \mathbf{J} \cdot \cdot \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 = \int_m z^2 dm.$$

Центробежный момент инерции поперечного сечения относительно оси  $Z$ :

$$J_{xy} = \mathbf{J} \cdot \cdot \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \int_m \mathbf{r} \mathbf{r} \cdot \cdot \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 dm = \int_m xy dm = J_{yx}.$$

Аналогично,

$$J_{yz} = \int_m yz dm = J_{zy}, \quad J_{zx} = \int_m xz dm = J_{xz}.$$

Матрица тензора момента инерции тела имеет вид:

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_y & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_z \end{bmatrix}.$$

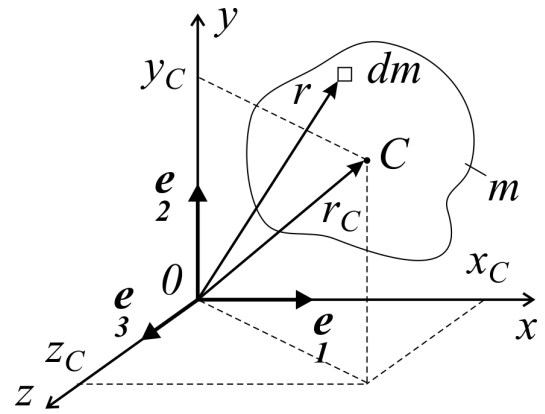


Рис.3.11. Твердое тело массой  $m$  и центром тяжести в точке  $C$

### 3.6. Понятие об упругости

Рассмотрим однородное напряженно-деформированное состояние *упругого* тела:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_A, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_A.$$

Пусть это тело нагрузили дополнительными силами и при этом внутри тела возникли дополнительные напряжения  $\boldsymbol{\sigma}_B$ , тогда деформация этого тела изменилась на величину  $\boldsymbol{\varepsilon}_B$ :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_A + \boldsymbol{\sigma}_B; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_A + \boldsymbol{\varepsilon}_B.$$

После снятия дополнительных нагрузок напряженно-деформированное состояние в упругом теле должно стать прежним:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_A + \boldsymbol{\sigma}_B - \boldsymbol{\sigma}_B = \boldsymbol{\sigma}_A; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_A,$$

Таким образом, *упругость* означает однозначную зависимость между напряжением и деформацией:

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\varepsilon}).$$

Такая зависимость может быть как линейной, так и нелинейной. Например, в случае одноосного растяжения эта функция примет вид  $\sigma_z = f(\varepsilon_z)$  и может быть изображена на плоскости (рис.3.12).

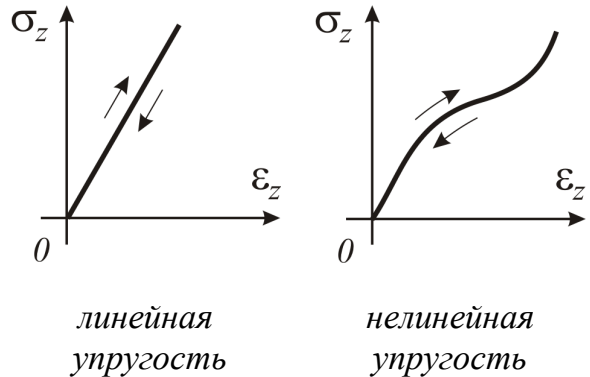


Рис.3.12. Иллюстрация упругости

### 3.7. Закон сохранения энергии

Рассмотрим однородную деформацию *упругого* куба со стороной  $a$  (рис.3.13). Пусть задано бесконечно малое смещение площадки с нормалью  $\mathbf{e}_1$ :

$$du = d\boldsymbol{\varepsilon} \cdot (a \mathbf{e}_1) = (d\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_1) a,$$

где  $d\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензор деформации, соответствующий заданному смещению  $du$ . С учетом того, что

$$d\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_1 = d\varepsilon_1$$

предыдущее выражение принимает вид

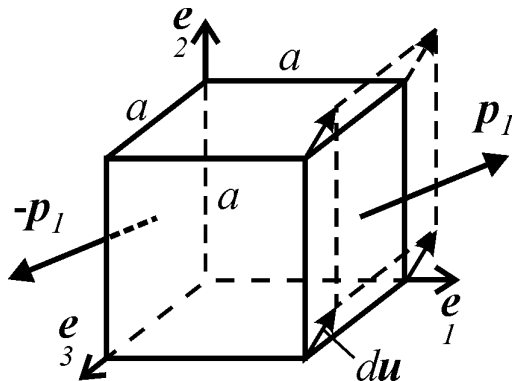


Рис.3.13. Однородная деформация упругого элемента объема

$$d\mathbf{u} = d\boldsymbol{\varepsilon}_1 a,$$

тогда работа сил  $\mathbf{p}_1 a^2$  на заданном бесконечно малом смещении  $d\mathbf{u}$  равна

$$dA_1 = (\mathbf{p}_1 a^2) \cdot d\mathbf{u} = (\mathbf{p}_1 a^2) \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}_1 a) = a^3 (\mathbf{p}_1 \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_1);$$

аналогично (с учетом принципа суперпозиции),

$$dA_2 = a^3 (\mathbf{p}_2 \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_2), \quad dA_3 = a^3 (\mathbf{p}_3 \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_3).$$

Суммарная работа сил (с учетом принципа суперпозиции) равна

$$dA = dA_1 + dA_2 + dA_3 = a^3 (\mathbf{p}_1 \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \mathbf{p}_2 \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \mathbf{p}_3 \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_3).$$

Теперь запишем удельную работу сил:

$$\begin{aligned} d\hat{A} &= \frac{dA}{a^3} = \mathbf{p}_1 \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \mathbf{p}_2 \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \mathbf{p}_3 \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_3 = \mathbf{p}_i \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_i = \\ &= (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\sigma} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}_i \mathbf{e}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}, \end{aligned}$$

то есть,

$$d\hat{A} = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \hat{A} = \int \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Запишем эти выражения в координатной форме:

$$d\hat{A} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ji}; \quad \hat{A} = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ji}.$$

С учетом упругости материала  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon})$ , можно отметить, что удельная работа представляет собой функцию только одного параметра – деформаций:

$$\hat{A} = \int \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}.$$

По физическому смыслу эта величина равна удельной энергии упругого деформирования тела  $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon})$ :

$$\hat{A} = \Psi \quad (d\hat{A} = d\Psi).$$

При нагружении тела внешними силами  $d\hat{A} > 0$  работа этих сил полностью расходуется на увеличение энергии упругого деформирования тела  $d\Psi > 0$ ; а при полной разгрузке  $d\hat{A} < 0$  энергия упругого деформирования также убывает  $d\Psi < 0$  до нуля.

**Закон сохранения энергии** требует, чтобы за полный цикл нагружение–разгрузка изменение энергии в упругом теле было равно нулю независимо от способа нагружения:

$$\oint d\hat{A} = \int \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} = \oint d\psi = 0.$$

В противном случае при повторении циклов энергия будет либо накапливаться из ничего, либо теряться, при этом структура материала и его свойства будут оставаться неизменными, так как тело упругое.

Рассмотрим изменение энергии в упругом теле при малом его деформировании от начального состояния  $O$  до некоторого состояния  $A$  (рис.3.14 а). По закону сохранения энергии можем записать следующее:

$$\int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}_B} \mathbf{f}_1(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} + \int_{\boldsymbol{\varepsilon}_B}^0 \mathbf{f}_2(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} = 0.$$

После несложных преобразований этого выражения получим, что

$$\int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}_B} \mathbf{f}_1(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} = \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}_B} \mathbf{f}_2(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \psi(\boldsymbol{\varepsilon}_B).$$

Из последнего выражения следует, что величина  $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}_A)$  не зависит от траектории, соединяющей точки  $O$  и  $A$ . Отсюда вывод: энергия упругого деформирования тела, а также упругая работа должны удовлетворять условию потенциальности:

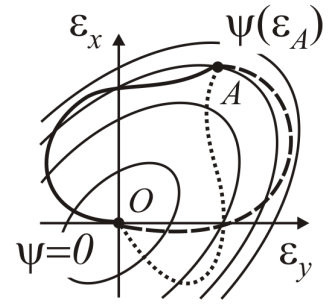
$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}), \hat{A}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \text{потенциальные функции.}$$

Величину  $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}_A)$  называют потенциалом функции  $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon})$ . Для двух состояний системы  $A$  и  $B$ , ни одно из которых не является начальным (рис.3.14 б), изменение удельной работы (как и энергии деформации) равно разности потенциалов в точках  $B$  и  $A$ :

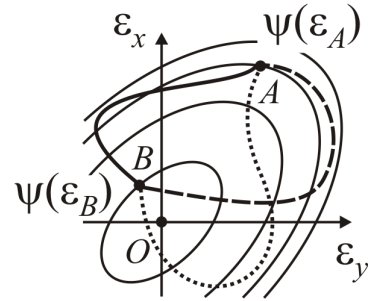
$$\Delta \hat{A} = \int_{\boldsymbol{\varepsilon}_A}^{\boldsymbol{\varepsilon}_B} \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}_B) - \psi(\boldsymbol{\varepsilon}_A).$$

Очевидно, что в случае одноосного напряженного состояния для выполнения закона сохранения энергии достаточно наличия у материала только свойства упругости (рис.3.15):

$$\sigma_x = f(\varepsilon_x).$$



а)



б)

Рис.3.14. Потенциальная функция деформаций

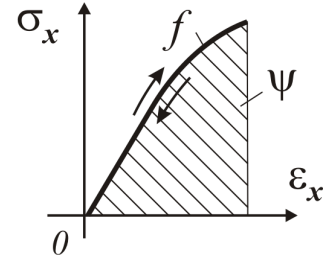


Рис.3.15. Одноосное растяжение упругого материала

Удельная работа напряжений в этом случае равна

$$\widehat{A} = \int \sigma_x \underset{11}{e e} \cdot d\varepsilon_x \underset{11}{e e} = \int \sigma_x d\varepsilon_x = \psi.$$

Однако в общем случае нагружения для выполнения закона сохранения энергии одного только свойства упругости материала недостаточно. Например, для линейно-упругого тела необходимо, чтобы оператор линейной связи между тензорами  $\boldsymbol{\sigma}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$  представлял собой четырехвалентный тензор, симметричный по перестановке первой и второй диады. Покажем это:

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{A} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \text{квадратичная форма,}$$

где  $\mathbf{A}$  – это некоторый четырехвалентный тензор, тогда

$$\begin{aligned} d\psi(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{1}{2} d\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{A} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{A} \cdot \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} = \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \underset{1T3}{\mathbf{A}} \cdot \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{A} \cdot \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \frac{1}{2} \left( \underset{1T3}{\mathbf{A}} + \underset{2T4}{\mathbf{A}} \right) \cdot \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Из последнего равенства следует:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \left[ \frac{1}{2} \left( \underset{1T3}{\mathbf{A}} + \underset{2T4}{\mathbf{A}} \right) \right] = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.5)$$

то есть, действительно, оператор линейной связи между тензорами  $\boldsymbol{\sigma}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$  должен представлять собой четырехвалентный тензор, симметричный по перестановке первой и второй диады.

### 3.8. Постулат устойчивости

**Постулат Друкера:** если к телу, находящемуся под действием системы сил, прикладываются дополнительные силы, то работа этих дополнительных сил на вызываемых ими (совместно с исходной системой сил) перемещениях неотрицательна. При приложении (и снятии) дополнительных сил их работа неотрицательна:

$$d\boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} \geq 0.$$

При одноосном напряженном состоянии можно записать проще:

$$d\sigma_x * d\varepsilon_x \geq 0.$$

Например, на рис.3.16 сплошными линиями показаны участки устойчивого поведения материала, а пунктиром показаны участки неустойчивости.

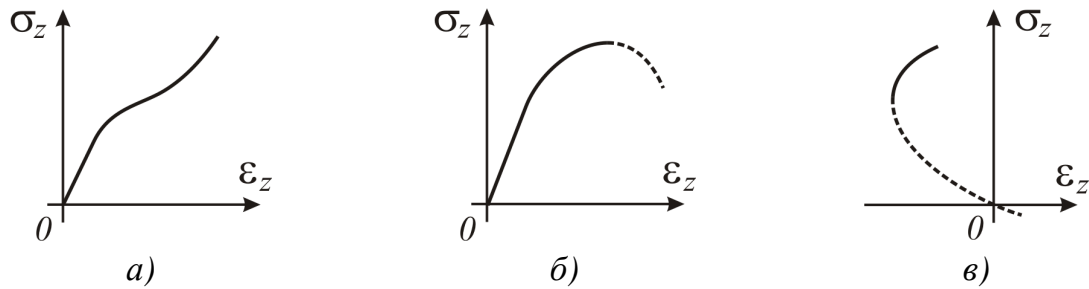


Рис.3.16. Участки устойчивого и неустойчивого поведения материала

Отметим, что на рис.3.16 б показана типичная диаграмма растяжения образца из реально существующего материала (например, легированной стали). Однако согласно постулату Друкера, неустойчивого участка на этой диаграмме быть не должно. Это противоречие можно легко разрешить, если вспомнить, что это диаграмма является диаграммой условных напряжений, а диаграмма истинных напряжений ниспадающего участка не имеет (см. рис.3.16 а), то есть неустойчивым является образец, а не материал.

### 3.9. Закон Гука для линейно-упругого тела

Рассмотрим линейно-упругое тело

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\epsilon}).$$

В силу линейности функция  $f$  должна обладать следующими свойствами:

$$f(\boldsymbol{\epsilon}_A + \boldsymbol{\epsilon}_B) = f(\boldsymbol{\epsilon}_A) + f(\boldsymbol{\epsilon}_B),$$

$$f(\lambda\boldsymbol{\epsilon}) = \lambda f(\boldsymbol{\epsilon}).$$

Кроме того, линейность этой функции означает, что существует некий линейный оператор связи между тензорами напряжений и деформаций – тензор  $\mathbf{C}$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\epsilon}. \quad (3.6)$$

Выражение (3.6) называется *законом Гука*, а тензор  $\mathbf{C}$  называют *тензором констант упругости*; он четырехвалентен и в общем случае должен содержать 81 независимую константу.

Перечислим свойства тензора констант упругости:

1. Симметрия по первой диаде – следствие симметрии тензора напряжений:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \Rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{C}^T.$$

2. Симметрия по перестановке первой и второй диады – следствие закона сохранения энергии:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^T.$$

### 3. Следствие первого и второго пунктов

$$\mathbf{C} = \underset{3T4}{\mathbf{C}}.$$

С учетом свойств симметрии число независимых констант тензора  $\mathbf{C}$  равно 21 и закон Гука можно записывать так:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{C}.$$

Основной (и весьма существенный) недостаток закона Гука в форме записи состоит в том, что, задача о нахождении деформаций по известным напряжениям

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

является весьма сложной, так как затруднено обращение четырехвалентного тензора констант упругости.

#### 3.10. Закон Гука для изотропного линейно-упругого тела

Тензор констант упругости для изотропного тела должен быть изотропным, четырехвалентным и обладать свойствами симметрии, указанными выше. Рассмотрим все существующие изотропные четырехвалентные тензоры (они, естественно, должны дважды включать в себя единственный изотропный двухвалентный тензор  $\mathbf{I}$ ):

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{I} = \underset{i i j j}{\mathbf{e e e e}}, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{I} = \underset{1T4}{\mathbf{I}} = \underset{2T3}{\mathbf{I}} \quad \text{и} \quad \mathbf{A}_3 = \mathbf{I} = \underset{2T4}{\mathbf{I}} = \underset{1T3}{\mathbf{I}}.$$

Свойствами симметрии, которые необходимы тензору констант упругости, обладает только первый из перечисленных тензоров. Составим из остальных тензоров новый, который будет обладать требуемыми свойствами симметрии:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3).$$

Теперь можно представить тензор констант упругости в виде линейной комбинации найденных (и обладающих требуемыми свойствами симметрии) тензоров.

$$\mathbf{C} = \lambda_1 \mathbf{A}_1 + \lambda_2 \mathbf{U} \Leftrightarrow \mathbf{C} = \lambda_1 \mathbf{I} + \frac{\lambda_2}{2} \left( \underset{1T3}{\mathbf{I}} + \underset{1T4}{\mathbf{I}} \right),$$

здесь  $\lambda_1, \lambda_2$  – константы упругости.

Запишем закон Гука с учетом найденного выражения для записи тензора констант упругости:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \lambda_1 \mathbf{A}_1 \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda_2 \mathbf{U} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Для удобства вычислим слагаемые отдельно:

$$1. \quad \mathbf{A}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \underset{i i j j}{e e e e} \cdot \underset{k l}{\varepsilon_{k l}} \underset{k l}{e e} = \underset{j j i i}{\varepsilon_{j j}} \underset{i i}{e e} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I};$$

$$2. \quad \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{I}^3 + \mathbf{I}^4) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{2}(\underset{j i i j}{e e e e} \cdot \underset{k l}{\varepsilon_{k l}} \underset{k l}{e e} + \underset{j i j i}{e e e e} \cdot \underset{k l}{\varepsilon_{k l}} \underset{k l}{e e}) = \frac{1}{2}(\underbrace{\varepsilon_{j i}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \underset{j i}{e e} + \underbrace{\varepsilon_{i j}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^T} \underset{j i}{e e}) = \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Здесь можно отметить, что тензор  $\mathbf{U}$  оказался симметрирующим тензором (для симметричных тензоров он является тензором тождественного преобразования).

В итоге получили, что закон Гука можно переписать следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda_1 \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} + \lambda_2 \boldsymbol{\varepsilon},$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – константы упругости.

Идентификацию констант упругости можно произвести, например, на основе следующих экспериментов: чистый сдвиг и всестороннее равномерное растяжение. Как будет показано позже, использованием результатов эксперимента на чистый сдвиг позволит определить константу  $\lambda_2$ , не определяя предварительно  $\lambda_1$ .

Итак, рассмотрим *чистый сдвиг* (рис. 3.17). Тензоры напряжений и деформаций при этом имеют вид:

$$\boldsymbol{\sigma} = \tau \begin{pmatrix} e e & \\ & e e \end{pmatrix}_{12 \quad 21}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \gamma \begin{pmatrix} e e & \\ & e e \end{pmatrix}_{12 \quad 21}.$$

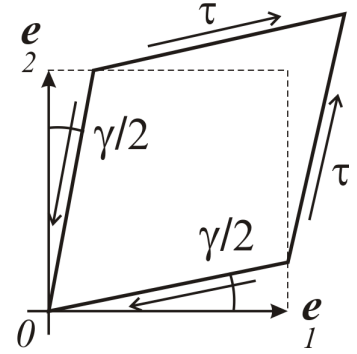


Рис.3.17. Чистый сдвиг

Подставим эти тензоры в закон Гука с учетом того факта, что  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$  (вследствие косой симметрии тензора деформаций):

$$\tau \begin{pmatrix} e e & \\ & e e \end{pmatrix}_{12 \quad 21} = \frac{1}{2} \lambda_2 \gamma \begin{pmatrix} e e & \\ & e e \end{pmatrix}_{12 \quad 21}.$$

Из единственности разложения по базису следует равенство коэффициентов при соответствующих базисных диадах

$$\tau = \frac{1}{2} \lambda_2 \gamma,$$

а из эксперимента известно, что при чистом сдвиге касательные напряжения линейно зависят от деформаций сдвига (причем коэффициентом этой линейной зависимости является модуль сдвига  $G$ )

$$\tau = G\gamma.$$

Сравнивая два последних выражения, получим равенство  $\frac{1}{2}\lambda_2\gamma = \gamma G$ , откуда найдем искомую величину  $\lambda_2 = 2G$ .

Теперь перейдем к рассмотрению *всестороннего равномерного растяжения* (рис. 3.18). Тензоры напряжений и деформаций при таком виде нагружения являются шаровыми тензорами:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_0 \mathbf{I} = \frac{1}{3} \underset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0 \mathbf{I} = \frac{1}{3} \underset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{I}.$$

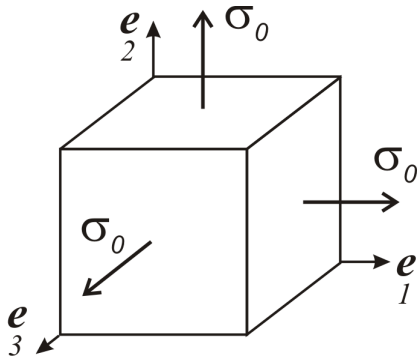


Рис.3.18. Всестороннее равномерное растяжение

Подставим их в Закон Гука:

$$\underbrace{\frac{1}{3} \underset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{I}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda_1 \underset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{I} + \lambda_2 \underbrace{\left( \frac{1}{3} \underset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{I} \right)}_{\boldsymbol{\varepsilon}}.$$

Из этого выражения следует линейная связь между скалярными свертками тензоров напряжений и деформаций:

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = (3\lambda_1 + \lambda_2) \underset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}.$$

Из экспериментов известно, что  $\underset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = 3K_0 \underset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ,

где  $K_0$  – объемный модуль упругости. Сравнивая два последних выражения и с учетом того, что  $\lambda_2 = 2G$ , получаем:

$$K_0 = \lambda_1 + \frac{2}{3}G \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = K_0 - \frac{2}{3}G.$$

С учетом найденных констант тензор констант упругости равен

$$\mathbf{C} = \left( K_0 - \frac{2}{3}G \right) \mathbf{II} + G \left( \underset{IT3}{\mathbf{II}} + \underset{IT4}{\mathbf{II}} \right),$$

а закон Гука приобретает вид

$$\boldsymbol{\sigma} = \left( K_0 - \frac{2}{3}G \right) \underset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{I} + 2G \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.7)$$

Выражение (3.7) представляет собой *закон Гука в форме Ламе*. Такая его форма записи уже гораздо удобней предыдущей (3.6), так как мы избавились от четы-

рехвалентного тензора, но все же решение задачи о нахождении деформаций по известным напряжениям опять представляется задачей достаточно сложной.

Заметим, что при чистом сдвиге тензоры напряжений и деформаций не содержат шаровых частей и представляют собой девиаторы и закон Гука связывает эти девиаторы константой  $2G$ :

$$\boldsymbol{\sigma}_D = 2G \boldsymbol{\varepsilon}_D.$$

При всестороннем равномерном растяжении (сжатии) ситуация обратная. Тензоры напряжений и деформаций не содержат девиационных частей и представляют собой шаровые тензоры, которые закон Гука связывает константой  $3K_0$ :

$$\boldsymbol{\sigma}_S = 3K_0 \boldsymbol{\varepsilon}_S.$$

Такая форма записи очень удобна: она проста и, кроме того, закон Гука легко обратим:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_D = \frac{1}{2G} \boldsymbol{\sigma}_D, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_S = \frac{1}{3K_0} \boldsymbol{\sigma}_S.$$

Покажем, что шаровые части тензоров напряжений и деформаций связаны соответствующими константами при любом виде нагружения тела. Для этого тензор констант упругости запишем в виде линейной комбинации неких взаимортогональных тензоров  $\mathbf{C}_1$  и  $\mathbf{C}_2$ :

$$\mathbf{C} = k_1 \mathbf{C}_1 + k_2 \mathbf{C}_2.$$

здесь  $k_1, k_2$  – константы упругости. Взаимная ортогональность тензоров  $\mathbf{C}_1$  и  $\mathbf{C}_2$  означает, что должны выполняться следующие условия:

$$\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_1, \quad \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_2, \quad \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_2 = 0.$$

Эти условия будут выполняться в том случае, если тензоры  $\mathbf{C}_1$  и  $\mathbf{C}_2$  будут равны соответственно:

$$\mathbf{C}_1 = \frac{\mathbf{A}_1}{3} = \frac{\mathbf{II}}{3}; \quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{U} - \mathbf{C}_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{II}}{IT^3} + \frac{\mathbf{II}}{IT^4} \right) - \frac{\mathbf{II}}{3}.$$

Покажем это.

$$1. \quad \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_1 = \frac{\mathbf{II}}{3} \cdot \frac{\mathbf{II}}{3} = \frac{1}{9} (\mathbf{II} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} = \frac{1}{9} (\mathbf{I} \mathbf{I}) \mathbf{I} = \frac{1}{9} (3\mathbf{I}) \mathbf{I} = \frac{\mathbf{II}}{3} = \mathbf{C}_1;$$

$$2. \quad \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{C}_2 = \left( \mathbf{U} - \frac{\mathbf{II}}{3} \right) \cdot \left( \mathbf{U} - \frac{\mathbf{II}}{3} \right) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} - 2\mathbf{U} \cdot \frac{\mathbf{II}}{3} + \frac{\mathbf{II}}{3} \cdot \frac{\mathbf{II}}{3} =$$

$$= U - \frac{2\Pi}{3} + \frac{\Pi}{3} = U - \frac{\Pi}{3} = C_2;$$

$$3. C_1 \cdot C_2 = \frac{\Pi}{3} \cdot (U - \frac{\Pi}{3}) = \frac{\Pi}{3} - \frac{\Pi}{3} = 0.$$

Таким образом, тензор констант упругости можно записать так:

$$C = \frac{k_1 - k_2}{3} \Pi + \frac{k_2}{2} (\Pi_{IT3} + \Pi_{IT4}).$$

Распишем тензор напряжений двумя способами:

$$\sigma = C \cdot \varepsilon = (k_1 C_1 + k_2 C_2) \cdot \varepsilon = k_1 C_1 \cdot \varepsilon + k_2 C_2 \cdot \varepsilon$$

$$\sigma = \sigma \cdot U = \sigma \cdot (C_1 + C_2)$$

Приравнивая друг другу правые части этих выражений, получим:

$$C_1 \cdot \sigma + C_2 \cdot \sigma = k_1 C_1 \cdot \varepsilon + k_2 C_2 \cdot \varepsilon.$$

Умножим скалярно последнее выражение слева на тензор  $C_1$ , а потом на  $C_2$ . В результате получим два независимых выражения:

$$C_1 \cdot \sigma = k_1 C_1 \cdot \varepsilon;$$

$$C_2 \cdot \sigma = k_2 C_2 \cdot \varepsilon.$$

Первое из этих выражений связывает шаровые части тензоров  $\sigma$  и  $\varepsilon$ , а второе связывает их девиаторы. Покажем это:

$$C_1 \cdot \sigma = \frac{\Pi}{3} \cdot \sigma = \frac{1}{3} e e e e \cdot \sigma_{km} e e = \frac{\sigma_{jj}}{3} e e = \sigma_0 I \quad \text{— шаровая часть } \sigma;$$

$$C_1 \cdot \varepsilon = \frac{\Pi}{3} \cdot \varepsilon = \frac{1}{3} e e e e \cdot \varepsilon_{km} e e = \frac{\varepsilon_{jj}}{3} e e = \varepsilon_0 I \quad \text{— шаровая часть } \varepsilon;$$

$$C_2 \cdot \sigma = (B_1 - C_1) \cdot \sigma = B_1 \cdot \sigma - C_1 \cdot \sigma = \sigma - \sigma_0 I \quad \text{— девиатор } \sigma;$$

$$C_2 \cdot \varepsilon = (B_1 - C_1) \cdot \varepsilon = B_1 \cdot \varepsilon - C_1 \cdot \varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0 I \quad \text{— девиатор } \varepsilon.$$

Введем обозначения:

$$\sigma - \sigma_0 I \equiv S, \quad \varepsilon - \varepsilon_0 I \equiv e,$$

тогда закон Гука примет вид, удобный для обращения:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma = k_1 \varepsilon \\ S = k_2 e \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \varepsilon = \frac{1}{k_1} \sigma \\ e = \frac{1}{k_2} S \end{array} \right\}.$$

Идентифицируем константы упругости  $k_1, k_2$  из простых экспериментов.

1. *Чистый сдвиг.* Ранее было получено, что при чистом сдвиге  $\sigma = 2G\varepsilon$ , и при этом шаровые части тензоров напряжений и деформаций отсутствуют, то есть,

$$S = 2Ge.$$

С учетом последней формы записи закона Гука получим, что  $k_2 = 2G$ .

2. *Одноосное растяжение стержня* (рис.3.19). Из эксперимента получили:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= E \varepsilon_{11}, \\ \varepsilon_{22} &= -\mu \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{33} = -\mu \varepsilon_{11}. \end{aligned}$$

Тензор напряжений равен

$$\sigma = \sigma_{11} \frac{e e}{1 1},$$

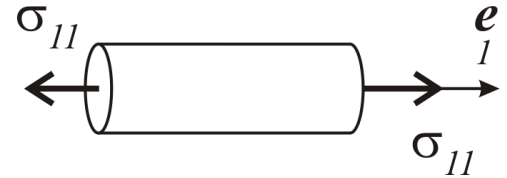


Рис.3.19. Одноосное растяжение

а тензор деформаций имеет следующий вид:

$$\varepsilon = \varepsilon_{11} \frac{e e}{1 1} - \varepsilon_{22} \frac{e e}{2 2} - \varepsilon_{33} \frac{e e}{3 3} = \varepsilon_{11} \frac{e e}{1 1} - \mu \varepsilon_{11} \frac{e e}{2 2} - \mu \varepsilon_{11} \frac{e e}{3 3}.$$

Шаровые части тензоров напряжений и деформаций равны следующему:

$$\sigma_0 I = \frac{\sigma_{11}}{3} I; \quad \varepsilon_0 I = \frac{1-2\mu}{3} \varepsilon_{11} I.$$

Девикторы тензоров напряжений и деформаций:

$$S = \sigma - \sigma_0 I = \sigma_{11} \frac{e e}{1 1} - \frac{\sigma_{11}}{3} (e e + e e + e e) = \frac{2}{3} \sigma_{11} \frac{e e}{1 1} - \frac{\sigma_{11}}{3} (e e + e e);$$

$$\begin{aligned} e = \varepsilon - \varepsilon_0 I &= (\varepsilon_{11} \frac{e e}{1 1} - \mu \varepsilon_{11} \frac{e e}{2 2} - \mu \varepsilon_{11} \frac{e e}{3 3}) - \frac{1-2\mu}{3} \varepsilon_{11} (e e + e e + e e) = \\ &= \frac{2(1+\mu)}{3} \varepsilon_{11} \frac{e e}{1 1} - \frac{(1+\mu)}{3} \varepsilon_{11} \frac{e e}{2 2} - \frac{(1+\mu)}{3} \varepsilon_{11} \frac{e e}{3 3}. \end{aligned}$$

Подставим в закон Гука величины  $\sigma_0$  и  $\varepsilon_0$ :

$$\frac{\sigma_{11}}{3} = k_1 \frac{1-2\mu}{3} \varepsilon_{11}.$$

Отсюда,

$$k_1 = \frac{E}{1-2\mu} (= 3K_0).$$

Ранее получили, что при чистом сдвиге

$$\mathbf{S} = 2G\mathbf{e}.$$

Подставим в это выражение тензоры девиаторы тензоров напряжений и деформаций:

$$\frac{\sigma_{11}}{3} (2\mathbf{e}_{11} - \mathbf{e}_{22} - \mathbf{e}_{33}) = \frac{2G(1+\mu)\varepsilon_{11}}{3} (2\mathbf{e}_{11} - \mathbf{e}_{22} - \mathbf{e}_{33}),$$

$$E(2\mathbf{e}_{11} - \mathbf{e}_{22} - \mathbf{e}_{33}) = 2G(1+\mu)(2\mathbf{e}_{11} - \mathbf{e}_{22} - \mathbf{e}_{33}).$$

Таким образом, получили связь между константами упругости

$$2G = \frac{E}{1+\mu}.$$

В результате получили систему выражений, наиболее удобных для записи закона Гука, которую в дальнейшем будем называть **законом Гука в девиаторах**:

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = 3K_0\boldsymbol{\varepsilon}_0, \mathbf{S} = 2G\mathbf{e}, \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0\mathbf{I} + \mathbf{S}. \quad (3.8)$$

Нетрудно видеть, что использование такой формы записи закона Гука позволяет легко решать не только задачу о нахождении напряжений при известных деформациях, но и обратную задачу:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \frac{1}{3K_0}\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{e} = \frac{1}{2G}\mathbf{S}, \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0\mathbf{I} + \mathbf{e}.$$

### 3.11. Контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения

#### *Вопросы для закрепления материала*

- Каковы основные гипотезы, принятые в теории однородного напряженно-деформированного состояния?
- Что называется тензором напряжений?
- Каков вид тензора напряжений при одноосном напряженном состоянии? Шаровом? Цилиндрическом? При чистом сдвиге?
- Что представляет собой материальное волокно?

- Что означает однородность деформированного состояния?
- Что называется тензором дисторсии?
- Что представляют собой координаты тензора дисторсии?
- Что представляют собой столбцы матрицы тензора дисторсии?
- Что называется тензором деформации?
- Что представляют собой координаты тензора деформации?
- Что представляют собой столбцы матрицы тензора деформации?
- Что называется тензором жесткого поворота?
- Что представляют собой координаты тензора жесткого поворота?
- Что представляют собой столбцы матрицы тензора жесткого поворота?
- Как связаны между собой тензоры дисторсии, деформации и жесткого поворота?
- Что такое вектор статического момента тела?
- Что такое тензор момента инерции?
- Какое тело называют упругим?
- Как вычислить удельную работу внутренних сил в упругом теле?
- Чему равна потенциальная энергия упругой деформации?
- Как формулируют закон сохранения энергии при однородном напряженно-деформированном состоянии?
- В чем состоит постулат устойчивости Друкера?
- Как формулируют Закон Гука для линейно-упругого тела?
- Какими способами можно записать Закон Гука для изотропного линейно-упругого тела?
- Каковы виды симметрии тензора констант упругости линейно-упругого тела?
- Как связаны между собой константы упругости изотропного тела?

*Задачи для самостоятельного решения*

- В плоскости  $\{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \}$  осуществлен поворот тела как жесткого целого на угол  $\varphi = 0,001$  по часовой стрелке. Определить тензор дисторсии.
- Известно, что в упругом теле в результате внешнего воздействия векторы, соответствующие базисным, получили приращения, определенные матрицей тензора дисторсии

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} * 10^{-3}.$$

Требуется определить тензор деформации, относительное изменение объема тела и относительное изменение площади фигуры, лежащей в плоскости базисных векторов  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ .

- Известно, что в упругом теле в результате внешнего воздействия векторы, соответствующие базисным, получили приращения, определенные матрицей тензора дисторсии

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 5 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} * 10^{-3}.$$

Требуется определить тензор поворота тела, как жесткого целого, а также угол и направление этого поворота.

- Дан тензор напряжений с матрицей

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Известно, что имеется площадка, в которой напряжения отсутствуют. Требуется определить эту площадку и величину  $x$ .

- Найти нормальные и касательные напряжения в октаэдрических площадках при однородном напряженном состоянии тела, которое определено тензором напряжений

$$\boldsymbol{\sigma} = -2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1.$$

- При однородном напряженно-деформированном состоянии упругого тела известна его деформация

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1.$$

Используя закон Гука в форме Ламе, определите тензор напряжений, а затем решите обратную задачу, используя закон Гука в девиаторах.

- При однородном напряженно-деформированном состоянии упругого тела задана его дисторсия

$$\mathbf{D} = 2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 - 4\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1.$$

Определите матрицу тензора напряжений.