

2. ТЕНЗОРЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В предыдущем разделе мы вспомнили понятие скаляра и вектора в линейном пространстве, а также ввели новые понятия – полиады и тензора. В линейном пространстве круг действий с тензорами весьма ограничен: при отсутствии деления, валентность тензоров с каждым действием может либо оставаться прежней (сложение, умножение на скаляр) либо возрастая (умножение на вектор), но не уменьшается.

Ситуация меняется, когда в линейном пространстве задается метрика на основе введения понятия скалярного произведения векторов. При этом все выводы, сделанные предыдущей главы, остаются в силе, но с появлением скалярного произведения появляются длины векторов и углы между ними, алгебра тензоров становится более насыщенной и приобретает важный для механиков смысл. При этом валентность участвующих в операциях тензоров может не только возрастая, но и убывать до нуля.

Поскольку нас интересует приложение тензорного аппарата к механике, ограничимся рассмотрением трёхмерного евклидова пространства.

2.1. Скалярное произведение векторов

Результатом *скалярного произведения* двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} называют число, обозначаемое $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ и линейно зависящее от сомножителей.

Свойства скалярного произведения:

- коммутативность: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$;
- ассоциативность: $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$;
- неотрицательность: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$.

Скалярное произведение вводится в линейное пространство искусственно, с помощью специального правила, зависящего от конкретного линейного пространства и преследуемых целей. Например, если элементами пространства являются функции, определённые на некотором отрезке, то в качестве скалярного произведения можно использовать интеграл от произведения двух функций (после чего можно говорить об ортогональности определённых элементов такого пространства). Если элементами являются совокупности чисел (например, матрицы), то скалярным произведением называют число, полученное специальным перемножением и сложением элементов этих матриц.

Величину $\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ называют *длиной* или *модулем* вектора \mathbf{x} и обозначают $|\mathbf{x}|$ или X .

Если вектор умножить на величину, обратную его длине, то получим вектор того же направления, но единичной длины. Такой вектор называют *ортом* заданного вектора:

$$t_x = \frac{\mathbf{x}}{x} = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}}.$$

Скалярное произведение позволяет определять не только длины векторов, но и *косинус угла* между ними:

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{a b} = t_a \cdot t_b,$$

причем знак угла этим выражением не определяется, так как косинус – это четная функция. Для определения знака угла между векторами необходимо знать, например, еще и синус этого угла.

Теперь наличие метрики в пространстве позволяет перефразировать определение *скалярного произведения*:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a b \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Скалярное произведение вектора и какого-либо орта называют *проекцией* этого вектора на направление, заданное этим ортом. Например, проекция вектора \mathbf{x} на направление, заданное единичным вектором \mathbf{t} , равна числу

$$x_t = \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}.$$

Отметим, что проекции вектора на базисные направления отнюдь не всегда равны его координатам. Например, рассмотрим для простоты двумерное пространство: на рис.2.1 изображены проекции вектора \mathbf{x} на направления единичного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$:

$$x_{e1} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1, \quad x_{e2} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2,$$

а также координаты x_1 и x_2 этого вектора при разложении в указанном базисе:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2.$$

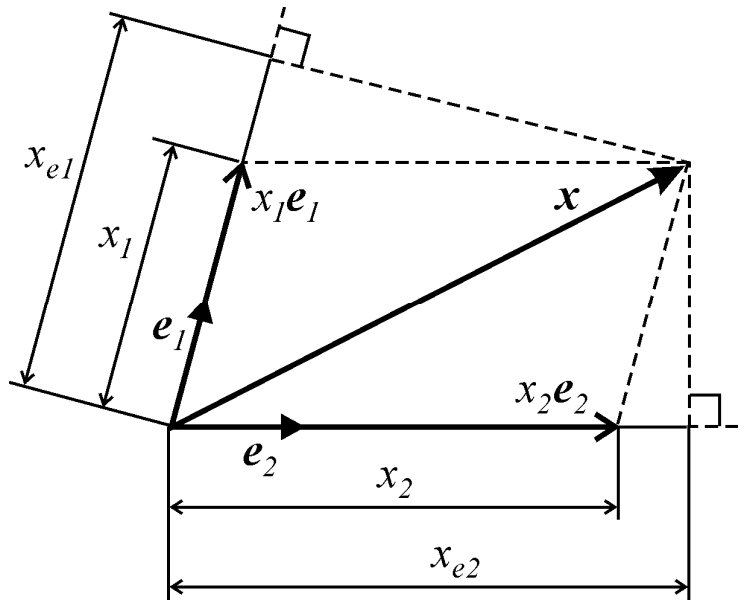


Рис.2.1. Проекции и координаты вектора

Очевидно, что в данном случае

$x_{e1} \neq x_1$ и $x_{e2} \neq x_2$. Координаты вектора \mathbf{x} оказались бы равны его проекциям только в том случае, если бы базисные единичные векторы были ортогональны.

2.2. Скалярное произведение тензоров

При скалярном произведении полиад производится обычное скалярное произведение двух векторов, разделённых скалярной точкой:

$$\begin{aligned} (a * b * c) \cdot (d * c) &= a * b * c \cdot d * c = \\ &= a * b * (c \cdot d) * c = a * b * \lambda * e = \lambda abc . \end{aligned}$$

Результатом перемножения является полиада, валентность которой на две единицы меньше суммы валентностей сомножителей. Заметим, что все «звёздочки» тензорных произведений в ответе сохранились. Их число может уменьшиться лишь при тензорном перемножении скаляров

$$(2 * a * b) \cdot (3 * c) = 6 * a * \underbrace{b \cdot c}_M = 6 * a * M = \underbrace{6 Ma}_V = na .$$

Если возникает необходимость в перемножении других векторов полиад, их перед умножением транспонируют

$$abc \cdot (de)^T = abc \cdot \underbrace{ed}_V = nabd .$$

Возможно многократное скалярное произведение полиад:

$$\begin{aligned} [(ab) \cdot (cd)] \cdot ef &= ab \cdot cd \cdot ef = \Gamma af , \quad \Gamma = (b \cdot c) * (d \cdot e) , \\ abc \cdot de &= va , \quad v = (c \cdot d)(b \cdot e) . \end{aligned}$$

По аналогичной схеме перемножаются суммы полиад, то есть тензоры:

$$\begin{aligned} (ab + cd) \cdot ef &= ab \cdot ef + cd \cdot ef , \\ A_{ij} e e \cdot B_{kl} e e &= A_{ij} B_{kl} e e \cdot e e = \lambda_{jk} A_{ij} B_{kl} e e , \\ A_{ij} e e \cdot B_{kl} e e &= A_{ij} B_{kl} (e \cdot e)(e \cdot e) = \lambda_{jk} \lambda_{il} A_{ij} B_{kl} . \end{aligned}$$

Скалярное произведение вектора и двухвалентного тензора в общем случае не коммутативно:

$$a \cdot T = \underset{T}{T} \cdot a .$$

Покажем это на примере простейшего двухвалентного тензора $T = bc$:

$$a \cdot T = a \cdot bc = (a \cdot b)c = c(a \cdot b) = c(b \cdot a) = cb \cdot a = \underset{T}{bc} \cdot a = \underset{T}{T} \cdot a .$$

Для более сложных двухвалентных тензоров, представляющих собой сумму нескольких диад, доказательство аналогично. Очевидно, что если двухвалентный тензор симметричен, то его скалярное произведение с вектором коммутативно:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{a}.$$

Подобно проекции вектора можно ввести понятие проекции тензора (которая является, например, для двухвалентного тензора вектором). Возможны две проекции тензора: правая и левая. Правая обозначается индексом справа:

$$\mathbf{T}_t = \mathbf{T} \cdot \mathbf{t},$$

а левая проекция – индексом слева:

$${}_t\mathbf{T} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{T}.$$

Очевидно, что для симметричного двухвалентного тензора правая и левая проекции совпадают.

2.3. Скалярная свертка

Перемножение векторов внутри полиады \mathbf{T} называют скалярным свертыванием полиады, а его результат – *скалярной сверткой* \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = \mathbf{ab} \rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b};$$

Если валентность тензора больше двух, то необходимо указать, по каким именно векторам производить свертку:

$$\mathbf{M} = \mathbf{abc} \rightarrow \underset{1 \circ 2}{\mathbf{M}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{bc}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{abcd} \rightarrow \underset{2 \circ 4}{\mathbf{N}} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{dac};$$

Аналогичные действия производят с тензорами, при этом валентность тензора уменьшается на два:

$$\mathbf{T} = \mathbf{ab} + \mathbf{cd} \rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{d};$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{abc} + \mathbf{def} \rightarrow \underset{1 \circ 3}{\mathbf{M}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{cb} + \mathbf{d} \cdot \mathbf{fe}.$$

Скалярная свертка, как и все выше перечисленные выражения, *инвариантна*, то есть не зависит от того, в каком именно базисе ее вычисляют.

2.4. Декартов базис

Как отмечалось ранее, вычисление скалярного произведения двух векторов производится в соответствии с некоторым предписанным правилом. Однако линейность этой операции позволяет существенно упростить вычисление, используя разложение векторов в некотором базисе $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{b} = b_j \mathbf{e}_j;$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_j \underbrace{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j}_{g_{ij}} = a_i b_j g_{ij}.$$

Полученное выражение показывает, что достаточно один раз перемножить все базисные векторы, получив так называемую метрическую матрицу $[g]$, чтобы в дальнейшем сводить вычисление скалярного произведения любых векторов к перемножению матриц:

$$[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}] = [\mathbf{a}]^T [g] [\mathbf{b}],$$

где $[g]$ – метрическая матрица; $[\mathbf{a}]$ и $[\mathbf{b}]$ – столбцы координат перемножаемых векторов в данном базисе.

Если базисные векторы $\{\mathbf{e}_i\}$ ортогональны, то матрица $[g]$ является диагональной, если при этом базисные векторы имеют единичную длину, то матрица $[g]$ является единичной:

$$[g] = [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Такой базис (векторы которого ортогональны и имеют единичную длину) называется **декартовым базисом**, его орты будем обозначать индексом снизу $\{\mathbf{e}_i\}$.

Декартов базис очень удобен. Например, скалярное произведение векторов, если его записать в координатной или матричной форме, в декартовом базисе имеет довольно простой вид:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i = [\mathbf{a}]^T [\mathbf{b}].$$

Кроме того, в декартовом базисе координаты вектора \mathbf{x} являются его проекциями на базисные орты:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i = x_k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i = x_k \delta_{ik} = x_i.$$

Здесь использовали символ Кронекера δ_{ij} , равный единице, если $i = j$ и нулю, если $i \neq j$. Можно догадаться, что в алгебраических выкладках с суммированием по индексам символ Кронекера можно опускать, одновременно заменяя все индексы i и j одной буквой, например i , j или k .

Из последнего выражения следует, что существует некий тензор, скалярное умножение которого на вектор не меняет этого вектора:

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{x}.$$

Такой тензор называют *тензором тождественного преобразования*

$$\mathbf{I} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3.$$

Довольно часто тензор \mathbf{I} называют также *единичным тензором*, так как его матрица в любом декартовом базисе единична.

Запишем в декартовом базисе скалярное произведение двухвалентного тензора и вектора в координатной и матричной форме:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = T_{ik} a_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j = (k, j \rightarrow j) = T_{ij} a_j \mathbf{e}_i, \quad [\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}] = [\mathbf{T}] [\mathbf{a}];$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = a_j T_{ik} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k = (i, j \rightarrow i) = T_{ik} a_i \mathbf{e}_k, \quad [\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}] = [\mathbf{T}]^T [\mathbf{a}].$$

При скалярном умножении некоторого тензора \mathbf{T} и базисного орта \mathbf{e}_l получим *первую проекцию* этого тензора: $\mathbf{T}_1 \equiv \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_l$, аналогично можно получить еще

две проекции: $\mathbf{T}_2 \equiv \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_2$ – *вторая проекция*; $\mathbf{T}_3 \equiv \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_3$ – *третья проекция*. С

использованием полученных проекций матрица двухвалентного тензора \mathbf{T} может быть представлена в следующем виде:

$$[\mathbf{T}] = [[[\mathbf{T}_1] \quad [\mathbf{T}_2] \quad [\mathbf{T}_3]]],$$

то есть столбцами матрицы тензора \mathbf{T} являются его проекции на базисные орты.

Пример №1. Определим, чему равно скалярное произведение единичного тензора на некоторый произвольный тензор слева и справа:

Решение. Пусть произвольный тензор \mathbf{T} двухвалентен, тогда

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{I} = T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k = (j, k \rightarrow n) = T_{in} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_n = \mathbf{T}.$$

Аналогично,

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k \cdot T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = (k, i \rightarrow i) = T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{T}.$$

В результате получили:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T},$$

то есть единичный тензор является тензором тождественного преобразования не только для векторов, но и для двухвалентных тензоров. Для тензоров более высокой валентности доказательство аналогично.

Пример №2. Докажем, что если $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}$, то и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Доказательство:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{I} \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Если скалярное произведение двух двухвалентных тензоров равно \mathbf{I} , то такие тензоры называют *взаимобратными*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Любой двухвалентный тензор можно разложить (причем единственным образом) на шаровую часть и девиационную:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{Ш} + \mathbf{T}_{Д};$$

$$\mathbf{T}_{Ш} = \frac{1}{3} \mathbf{T} \mathbf{I} \text{ – шаровая часть тензора, } \mathbf{T}_{Д} = \mathbf{T} - \mathbf{T}_{Ш} \text{ – девиатор.}$$

Смысл разделения тензора на шаровую часть и девиатор станет очевидным несколько позже, при выводе закона Гука. Для вычисления шаровой части тензора необходимо уметь вычислять его скалярную свертку. В декартовом базисе скалярная свертка равна следу матрицы, то есть сумме ее диагональных элементов:

$$\mathbf{T} = T_{11} + T_{22} + T_{33}.$$

2.5. Собственные числа тензора

Ограничимся рассмотрением в этом параграфе только симметричных тензоров, поскольку в основном собственные числа именно этих тензоров находят приложение в механике.

Пусть задан симметричный тензор \mathbf{S} , на который будем умножать множество различных векторов \mathbf{x} , получая в результате новые векторы $\mathbf{S} \cdot \mathbf{x}$. Среди множества векторов \mathbf{x} обязательно найдется такой, что получающийся вектор $\mathbf{S} \cdot \mathbf{x}$ окажется коллинеарным вектору \mathbf{x} . Такой вектор называется *собственным* (или *главным*) *вектором тензора* \mathbf{S} . Его будем обозначать в дальнейшем буквой \mathbf{c} :

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{c} = \lambda \mathbf{c}.$$

Число λ показывает, во сколько раз удлинится собственный вектор от умножения на тензор \mathbf{S} и называется *собственным* (или *главным*) *числом тензора* \mathbf{S} .

Нетрудно увидеть, что вектор $\beta \mathbf{c}$ (где β – произвольное число) также является собственным вектором с тем же главным значением λ . Поэтому длина собственного вектора не имеет значения, а только его направление.

Из последнего выражения следует:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{c} - \lambda \mathbf{c} = (\mathbf{S} - \mathbf{I}\lambda) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0},$$

следовательно, $(\mathbf{S} - \mathbf{I}\lambda)$ – вырожденный тензор и определитель его матрицы равен нулю:

$$|\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} S_{11} - \lambda & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} - \lambda & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Это выражение называют характеристическим, и оно может быть представлено в виде кубического уравнения с тремя неизвестными λ :

$$\lambda^3 - J_1\lambda^2 + J_2\lambda - J_3 = 0,$$

где

$$J_1 = S_{11} + S_{22} + S_{33};$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{33} & S_{31} \\ S_{13} & S_{11} \end{vmatrix}; \quad J_3 = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix}.$$

Каждому из найденных собственных чисел соответствует собственный вектор \mathbf{c}_i , который находят из выражения

$$(\mathbf{S} - \mathbf{I}\lambda) \cdot \mathbf{c}_i = \mathbf{0}.$$

Для симметричных тензоров все собственные числа вещественны, а собственные векторы ортогональны.

Пример №3. Найдем собственные числа и собственные направления тензора

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 4 = 0,$$

отсюда найдем главные числа тензора: $\lambda_1 = -1$, а $\lambda_2 = 3$.

Определим главный вектор \mathbf{c}_1 , соответствующий первому главному числу:

$$[\mathbf{T} - \lambda_1\mathbf{I}] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = c_2.$$

Пусть $c_1 = 1$, тогда и $c_2 = 1$, следовательно, первое главное направление

$$\mathbf{c}_1 = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad [\mathbf{c}_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Аналогично найдем главный вектор \mathbf{c}_2 , соответствующий второму главному числу:

$$[\mathbf{T} - \lambda_2 \mathbf{I}] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = -c_2.$$

Пусть $c_1 = 1$, тогда $c_2 = -1$, следовательно, второе главное направление

$$\mathbf{c}_2 = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \quad [\mathbf{c}_2] = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим случай, когда оси ортонормированного базиса направлены вдоль главных векторов заданного симметричного тензора. В общем случае такой тензор можно записать в виде суммы трех диад

$$\mathbf{S} = \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i, \quad [\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

где λ_i – это главные числа, а \mathbf{e}_i – орты главных направлений тензора \mathbf{S} . Для симметричной суммы двух диад в главных координатах получится

$$\mathbf{S} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2, \quad [\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь главные числа – это λ_1 , λ_2 и 0 ; а главные направления задаются векторами \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и \mathbf{e}_3 . Для одной диады в главных координатах получим

$$\mathbf{S} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1, \quad [\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь главным направлением является \mathbf{e}_1 и все направления, ему ортогональные, два главных числа равны нулю, а третье главное число – это λ_1 .

Тензор, у которого все главные значения равны

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \equiv \lambda,$$

называется *изотропным* (или *шаровым*). Любое направление такого тензора является главным. Например, среди двухвалентных тензоров изотропным является единичный тензор \mathbf{I} и, естественно, все тензоры, отличающиеся от него на константу $\lambda \mathbf{I}$.

В случае, когда совпадают только два главных значения тензора, например

$$\lambda_2 = \lambda_3 \equiv \lambda,$$

его можно записать в виде суммы шарового тензора и одной диады:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \lambda \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \lambda \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 = (\lambda \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \lambda \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \lambda \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) + \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \lambda \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \\ &= \lambda \mathbf{I} + (\lambda_1 - \lambda) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Главные направления этого тензора задаются вектором \mathbf{e}_1 и любыми другими векторы ему ортогональными. Такой тензор называют *ортотропным* (или *трансверсально изотропным*).

2.6. Векторное произведение

Введем новый тензор, который обычно называют тензором *Леву-Чевитта* или *альтернирующим* тензором – это трехвалентный изотропный тензор:

$$\mathfrak{A} = -p (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1).$$

Его сокращенная форма записи имеет вид:

$$\mathfrak{A} = -p \delta_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k,$$

$$\delta_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{при } i, j, k = 123, 231, 312 \\ -1 & \text{при } i, j, k = 321, 213, 132 \quad \text{– символ Веблена.} \\ 0 & \text{во всех остальных случаях} \end{cases}$$

Здесь p – это коэффициент, определяющий «правизну» используемого базиса: в правой декартовой системе координат $p = 1$, в левой системе $p = -1$. Договоримся, что все дальнейшие операции с альтернирующим тензором будем проводить в правой системе координат, тогда он всегда будет равен

$$\mathfrak{A} = -\delta_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2.$$

Нетрудно видеть, что альтернирующий тензор кососимметричен по любой паре векторов триад:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{IT3} = \mathfrak{A}_{IT2} = \mathfrak{A}_{2T3} = -\mathfrak{A}.$$

Двойное же транспонирование тензора \mathfrak{A} , естественно, не изменяет его.

Пример №4. Покажем, что проекция альтернирующего тензора на вектор (правая или левая) дает кососимметричный тензор

$$\mathfrak{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{K} = \mathbf{a} \cdot \mathfrak{A}.$$

Докажем сначала первую часть равенства:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \cdot \mathbf{a} &= -\delta_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \cdot a_n \mathbf{e}_n = -a_k \delta_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \\ &= a_1 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 - a_3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - a_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 - a_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 = \\ &= a_3 (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) + a_1 (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2) + a_2 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) = \mathbf{K}. \end{aligned}$$

Докажем теперь, что $\mathfrak{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathfrak{A}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathfrak{A} &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + \dots) = (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{a} + \dots) = \\ &= (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + \dots)_{IT2} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + \dots)_{2T3} \cdot \mathbf{a} = \mathfrak{A} \cdot \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Рассмотрев проекцию тензора \mathfrak{A} на один из базисных векторов, например, на вектор \mathbf{e}_3 , получим кососимметричный тензор:

$$\mathfrak{A}_3 \equiv \mathfrak{A} \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3.$$

А теперь на плоскости ортогональной \mathbf{e}_3 рассмотрим вектор \mathbf{a} (рис.2.2):

$$\mathbf{a} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2$$

и спроецируем тензор \mathfrak{A}_3 на этот вектор:

$$\mathfrak{A}_3 \cdot \mathbf{a} = \mathfrak{A}_3 \cdot (x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2) = (-\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2) \cdot (x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2) = x \mathbf{e}_3 - y \mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{a}'.$$

В результате получили вектор \mathbf{a}' , равный по модулю исходному вектору \mathbf{a} , и, повернутый на угол $\pi/2$ против часовой стрелки в плоскости ортогональной \mathbf{e}_3 :

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{a}'|, \mathbf{a}' \perp \mathbf{a} \perp \mathbf{e}_3.$$

То есть для вектора \mathbf{a} (ортогонального \mathbf{e}_3), тензор \mathcal{E}_3 является тензором поворота против часовой стрелки на угол $\pi/2$ в плоскости $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

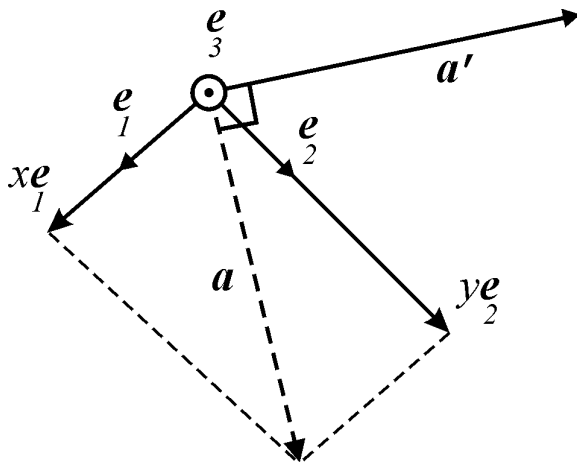


Рис. 2.2. Геометрическое представление выражения

$$\mathbf{a}' = \mathcal{E}_3 \cdot \mathbf{a} = \mathcal{E} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{a}$$

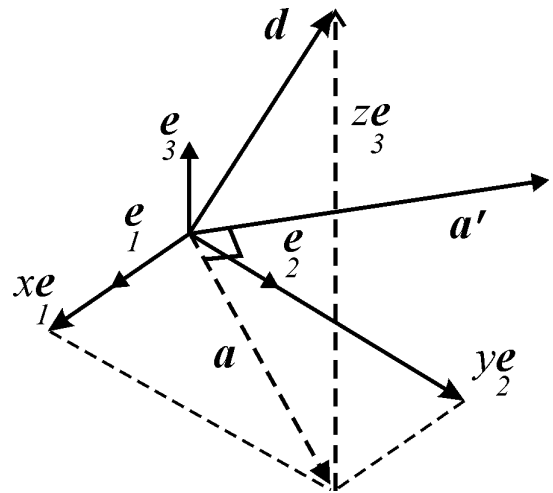


Рис. 2.3. Геометрическое представление выражения

$$\mathbf{a}' = \mathcal{E}_3 \cdot \mathbf{d} = \mathcal{E} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{d}$$

Теперь немного усложним ситуацию и спроецируем тензор \mathcal{E}_3 на вектор \mathbf{d} , лежащий вне плоскости $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (рис.2.3):

$$\mathbf{d} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = \mathbf{a} + z\mathbf{e}_3.$$

В результате получили все тот же самый, что и в предыдущем случае, вектор \mathbf{a}' :

$$\mathcal{E}_3 \cdot \mathbf{d} = \mathcal{E}_3 \cdot (\mathbf{a} + z\mathbf{e}_3) = \mathcal{E}_3 \cdot \mathbf{a} = x\mathbf{e}_2 - y\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}',$$

то есть для вектора \mathbf{d} тензор \mathcal{E}_3 является тензором проецирования на плоскость, ортогональную \mathbf{e}_3 , с поворотом против часовой стрелки на угол $\pi/2$:

$$\mathbf{a}' \perp \{\mathbf{d}, \mathbf{e}_3\}.$$

Поскольку векторы \mathbf{e} и \mathbf{d} были выбраны произвольно, то вместо них можно брать любые другие два вектора, например, \mathbf{a} и \mathbf{b} , получая при этом тот же ре-

зультат. Таким образом, можно сделать вывод: *двойное скалярное произведение альтернирующего тензора на два произвольно взятых вектора $\mathcal{E} \cdot a \cdot b$ дает третий, ортогональный плоскости первых двух и образующий с ними правую тройку векторов*. Выражение $\mathcal{E} \cdot a \cdot b$ имеет специальное название – *векторное произведение*, и специальное обозначение, знакомое еще из школьной программы:

$$\mathcal{E} \cdot a \cdot b \equiv a \times b, \quad (a \times b) \perp \{a, b\}.$$

При решении задач полезно помнить, что векторное произведение можно записать различными способами:

$$a \times b = \mathcal{E} \cdot a \cdot b = a \cdot b \cdot \mathcal{E} = ab \cdot \mathcal{E} = \mathcal{E} \cdot ab = a \cdot \mathcal{E} \cdot b.$$

Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма со сторонами a и b :

$$|a \times b| = a b \sin(a, b).$$

Пример №5. Покажем, чему равно векторное произведение двух базисных векторов в правой системе координат.

$$\begin{aligned} e_1 \times e_2 &= e_1 \cdot \mathcal{E} \cdot e_2 = e_1 \cdot (e_1 e_1 + e_1 e_2 + e_1 e_3 - e_2 e_1 - e_2 e_2 - e_2 e_3) \cdot e_2 = \\ &= (e_1 e_2 - e_2 e_1) \cdot e_2 = e_3. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} e_2 \times e_3 &= e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2, \quad e_1 \times e_3 = -e_2, \quad e_2 \times e_1 = -e_3, \quad e_3 \times e_2 = -e_1, \\ e_1 \times e_1 &= e_2 \times e_2 = e_3 \times e_3 = 0. \end{aligned}$$

В левой системе координат знаки поменяются на противоположные.

Рассмотренный пример показал, что в отличие от скалярного произведения, векторное некоммутативно.

Смешанным произведением называется результат тройного скалярного произведения, в котором участвует альтернирующий тензор:

$$(a \times b) \cdot c = \mathcal{E} \cdot abc = abc \cdot \mathcal{E} = a \cdot (b \times c) \equiv [abc],$$

Результатом смешанного произведения $(a \times b) \cdot c$ является число, равное объему шестигранной призмы, построенной на векторах a , b , c , как на ребрах:

$$[abc] = |[a][b][c]|.$$

Пример №6. Покажем, что любой двухвалентный кососимметричный тензор \mathbf{K} можно задать либо с помощью одного вектора $\boldsymbol{\omega}$, либо с помощью двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , которые связаны между собой векторным произведением:

$$\begin{cases} \mathbf{K} = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} \\ \mathbf{K} = \mathbf{ab} - \mathbf{ba} \end{cases}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

Ранее было показано, что верхнее выражение в координатной форме имеет вид:

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} = \omega_3 \begin{pmatrix} \mathbf{e} \mathbf{e} - \mathbf{e} \mathbf{e} \\ 2 \ 1 \quad 1 \ 2 \end{pmatrix} + \omega_1 \begin{pmatrix} \mathbf{e} \mathbf{e} - \mathbf{e} \mathbf{e} \\ 3 \ 2 \quad 2 \ 3 \end{pmatrix} + \omega_2 \begin{pmatrix} \mathbf{e} \mathbf{e} - \mathbf{e} \mathbf{e} \\ 1 \ 3 \quad 3 \ 1 \end{pmatrix}.$$

Распишем нижнее выражение:

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} - \mathbf{ba} &= (a_1 b_1 - b_1 a_1) \begin{pmatrix} \mathbf{e} \mathbf{e} \\ 1 \ 1 \end{pmatrix} + (a_1 b_2 - b_1 a_2) \begin{pmatrix} \mathbf{e} \mathbf{e} \\ 1 \ 2 \end{pmatrix} + (a_1 b_3 - b_1 a_3) \begin{pmatrix} \mathbf{e} \mathbf{e} \\ 1 \ 3 \end{pmatrix} + \dots = \\ &= (b_1 a_2 - a_1 b_2) \begin{pmatrix} \mathbf{e} \mathbf{e} - \mathbf{e} \mathbf{e} \\ 2 \ 1 \quad 1 \ 2 \end{pmatrix} + (b_1 a_3 - a_1 b_3) \begin{pmatrix} \mathbf{e} \mathbf{e} - \mathbf{e} \mathbf{e} \\ 3 \ 1 \quad 1 \ 3 \end{pmatrix} + \\ &\quad + (b_2 a_3 - a_2 b_3) \begin{pmatrix} \mathbf{e} \mathbf{e} - \mathbf{e} \mathbf{e} \\ 3 \ 2 \quad 2 \ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь осталось доказать, что коэффициенты при соответствующих разностях базисных диад равны соответственно:

$$\omega_3 = (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_3 = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & 0 \\ b_2 & a_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = b_1 a_2 - a_1 b_2.$$

Аналогично доказывается, что $\omega_2 = b_1 a_3 - a_1 b_3$, а $\omega_1 = b_2 a_3 - a_2 b_3$.

2.7. Векторное свертывание

Векторным свертыванием называют векторное перемножение векторов полиады, составляющих тензор:

$$\mathbf{T} = \mathbf{ab} + \mathbf{cd} = \mathbf{ef} + \mathbf{gh} \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{c} \times \mathbf{d} = \mathbf{e} \times \mathbf{f} + \mathbf{g} \times \mathbf{h} \equiv \mathbf{T};$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{adfh} \Rightarrow \mathbf{M} = \mathbf{a} \times \mathbf{dfh}.$$

Вспомним, что результатом скалярной свертки диады, находящейся внутри полиады, всегда является число, и его можно помещать в любое место полиады. Результатом векторной свертки является вектор, поэтому при необходимости нужно указывать, в какое место полиады его необходимо поместить:

$$\mathbf{M}_{(1 \otimes 3) \rightarrow 1} = (\mathbf{a} \times \mathbf{f}) \mathbf{dh}, \quad \mathbf{M}_{(1 \otimes 3) \rightarrow 2} = \mathbf{d}(\mathbf{a} \times \mathbf{f}) \mathbf{h}, \quad \mathbf{M}_{(1 \otimes 3) \rightarrow 3} = \mathbf{dh}(\mathbf{a} \times \mathbf{f}).$$

Очевидно, что валентность векторно свернутой полиады снижается на единицу.

Пример №7. Вычислим, чему равна векторная свертка альтернирующего тензора по второму и третьему векторам.

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \underset{2 \otimes 3}{\mathbf{e}} \underset{3}{\mathbf{e}} \times \underset{1}{\mathbf{e}} + \underset{3}{\mathbf{e}} \underset{2}{\mathbf{e}} \times \underset{1}{\mathbf{e}} + \underset{2}{\mathbf{e}} \underset{1}{\mathbf{e}} \times \underset{3}{\mathbf{e}} - \underset{1}{\mathbf{e}} \underset{3}{\mathbf{e}} \times \underset{2}{\mathbf{e}} - \underset{1}{\mathbf{e}} \underset{2}{\mathbf{e}} \times \underset{3}{\mathbf{e}} - \underset{3}{\mathbf{e}} \underset{1}{\mathbf{e}} \times \underset{2}{\mathbf{e}} = \\ &= \underset{3}{\mathbf{e}}(-\underset{3}{\mathbf{e}}) + \underset{3}{\mathbf{e}}(-\underset{2}{\mathbf{e}}) + \underset{2}{\mathbf{e}}(-\underset{1}{\mathbf{e}}) - \underset{1}{\mathbf{e}}\underset{1}{\mathbf{e}} - \underset{1}{\mathbf{e}}\underset{2}{\mathbf{e}} - \underset{3}{\mathbf{e}}\underset{3}{\mathbf{e}} = -2\mathbf{I}. \end{aligned}$$

Пример №8. Докажем, что векторная свертка кососимметричного двухвалентного тензора, заданного вектором ω равна

$$\mathbf{K} = -2\omega.$$

Доказательство:

$$\mathbf{K} = \omega \cdot \mathfrak{A} \Rightarrow \mathbf{K} = \underset{\otimes}{\omega} \cdot \underset{\otimes}{\mathfrak{A}} = \underset{\otimes}{\omega} \cdot \underset{2 \otimes 3}{\mathfrak{A}} = -2\omega \cdot \mathbf{I} = -2\omega.$$

Для доказательства использовали результат решения предыдущего примера.

Пример №9. Найдем векторную свертку симметричного тензора по его симметричной составляющей.

Рассмотрим тензор произвольной валентности, симметричный по n -ному и $(n+1)$ -му векторам:

$$\mathbf{S} = \dots \underset{\uparrow}{f} \underset{\uparrow}{\mathbf{a}} \underset{\uparrow}{\mathbf{a}} \underset{\uparrow}{d} \dots + \dots \underset{\uparrow}{g} \underset{\uparrow}{\mathbf{b}} \underset{\uparrow}{\mathbf{b}} \underset{\uparrow}{n} \dots + \dots,$$

$n \quad n+1 \qquad \qquad \qquad n \quad n+1$

свернем его по соответствующим симметричным диадам. В результате получим:

$$\underset{n \otimes (n+1)}{\mathbf{S}} = \dots \underset{\underset{0}{\mathbf{a}} \times \underset{\mathbf{a}}{\mathbf{a}}}{f} \dots + \dots \underset{\underset{0}{\mathbf{b}} \times \underset{\mathbf{b}}{\mathbf{b}}}{g} \dots = \mathbf{0}.$$

2.8. Тензор как линейный оператор

Рассмотрим линейную векторную функцию от аргумента – вектора

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Тот факт, что эта функция является линейной, означает следующее:

$$\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{f}(\mathbf{b}), \quad \mathbf{f}(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Докажем, что *любая линейная векторная функция от аргумента вектора представляет собой скалярное произведение некоторого двухвалентного тензора на этот вектор.* Для доказательства используем свойства линейности заданной функции, а также разложение векторного аргумента по базису.

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \underset{i}{f}(x_i \underset{1}{\mathbf{e}}) = \underset{1}{f}(x_1 \underset{2}{\mathbf{e}}) + \underset{2}{f}(x_2 \underset{3}{\mathbf{e}}) + \dots$$

$$= \underbrace{f(\mathbf{e})x_1}_a + \underbrace{f(\mathbf{e})x_2}_b + \underbrace{f(\mathbf{e})x_3}_c = ax_1 + bx_2 + cx_3.$$

Вспомним, что в декартовом базисе координаты вектора представляют собой его проекции на базисные орты

$$x_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x},$$

тогда предыдущее выражение можно переписать так:

$$\underbrace{a\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{x} + \underbrace{b\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{x} + \underbrace{c\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{x} = (\underbrace{a\mathbf{e}}_1 + \underbrace{b\mathbf{e}}_2 + \underbrace{c\mathbf{e}}_3) \cdot \mathbf{x}.$$

Выражение в скобках представляет собой некий двухвалентный тензор, который называют *оператором линейной связи* между векторами \mathbf{x} и \mathbf{y} . Обозначив его буквой \mathbf{T} , получим, что линейная связь между двумя векторами действительно определяется выражением

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x},$$

в котором присутствует линейный оператор и скалярное произведение.

Аналогично можно показать справедливость выражений:

$$\overline{\overline{\mathbf{Y}}}(\overline{\overline{\mathbf{X}}}) = \overline{\overline{\overline{\mathbf{T}}}} \cdot \overline{\overline{\overline{\mathbf{X}}}}, \lambda(\overline{\overline{\mathbf{X}}}) = \overline{\overline{\mathbf{T}}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{X}}}, \overline{\overline{\mathbf{Y}}}(\overline{\overline{\mathbf{X}}}) = \overline{\overline{\mathbf{T}}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{X}}} \dots$$

(вспомним, что количество черточек над тензором означает его валентность).

Некоторые тензоры – линейные операторы нам уже встречались ранее и неоднократно были использованы для различных линейных преобразований. Например, тензором тождественного преобразования вектора является единичный тензор \mathbf{I} (он при скалярном произведении с вектором не меняет его). Нетрудно догадаться, что линейным оператором, который изменяет направление вектора на противоположное, является тензор $(-\mathbf{I})$. Тензор $\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I} - \mathbf{nn}$ – это линейный оператор, проецирующий вектор на плоскость, заданную единичной нормалью \mathbf{n} (рис.2.4):

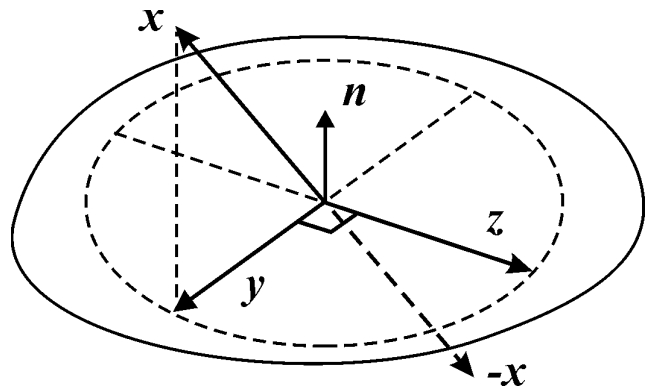


Рис.2.4. Линейные преобразования вектора \mathbf{x}

Тензор $\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I} - \mathbf{nn}$ – это линейный оператор, проецирующий вектор на плоскость, заданную единичной нормалью \mathbf{n} (рис.2.4):

$$\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{nn}) \cdot \mathbf{x},$$

а тензор $\mathcal{E}_n = \mathcal{E} \cdot \mathbf{n}$ проецирует вектор на эту плоскость и затем поворачивает на угол $\pi/2$ против часовой стрелки

$$y_1 = \lambda_1 x_1, \quad y_2 = \lambda_2 x_2, \quad y_3 = \lambda_3 x_3.$$

То есть, при симметричном преобразовании векторы \mathbf{x} , направленные вдоль главных направлений заданного симметричного тензора не поворачиваются, а только удлиняются или укорачиваются. На рис.2.5 показано множество единичных векторов при симметричном преобразовании.

В случае, когда одно или несколько главных чисел тензора \mathbf{S} равно нулю симметричное преобразование называется **вырожденным**:

- $\lambda_1 = 0 \Rightarrow$ шар преобразуется в эллипс, ортогональный вектору \mathbf{e}_1 ;
- $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow$ шар преобразуется в отрезок параллельный \mathbf{e}_3 ;
- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow$ шар преобразуется то в точку.

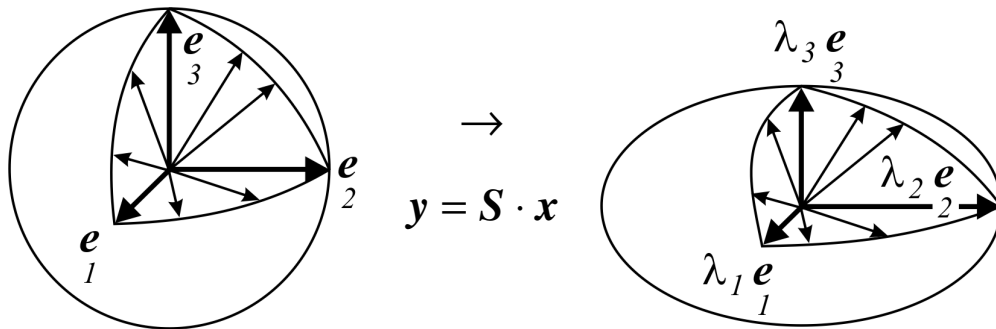


Рис. 2.5. Симметричное преобразование

Кососимметричное преобразование. Пусть дано множество векторов $\{\mathbf{x}\}$ и некий кососимметричный тензор \mathbf{K} . Выясним, как изменится заданное множество при кососимметричном преобразовании

$$\mathbf{y} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}.$$

Например, пусть кососимметричный тензор имеет вид

$$\mathbf{K} = \mathbf{ab} - \mathbf{ba}.$$

Вспомним, что кососимметричный тензор можно определить неким вектором, например $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$:

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

В этой связи результат кососимметричного преобразования можно представить в виде векторного произведения

$$\mathbf{y} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}.$$

Таким образом, можно отметить, что кососимметричное преобразование является вырожденным. То есть, множество произвольных векторов $\{\mathbf{x}\}$ в результате такого преобразования проецируется на плоскость, ортогональную вектору $\boldsymbol{\omega}$

(который определяет тензор \mathbf{K}) и поворачивается на $\pi/2$ против часовой стрелки (в правом базисе). На рис. 2.6 показано кососимметричное преобразование множество единичных векторов при кососимметричном преобразовании.

2.9. Полярные и цилиндрические координаты

Для простоты сначала рассмотрим полярную систему координат. *Полярная система координат* определяется на плоскости полюсом O и единичным вектором \mathbf{t} , определяющим начало отсчета угловой координаты Φ , как показано на рис. 2.7. Введем единичный вектор \mathbf{n} , ортогональный начальному вектору \mathbf{t} такой, что

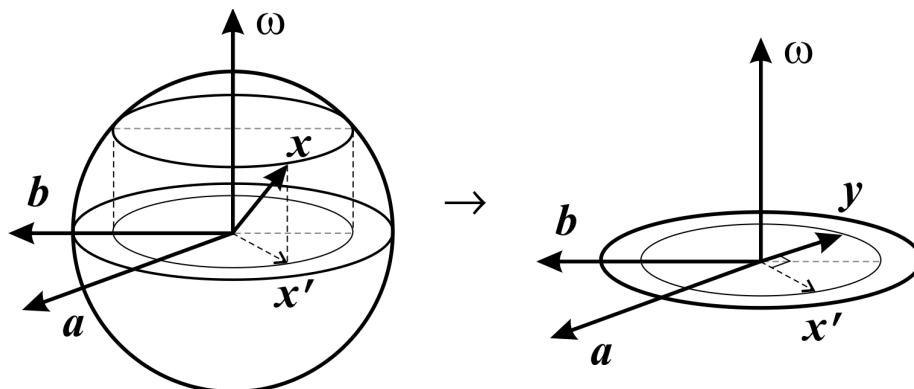


Рис. 2.6. Кососимметричное преобразование

$$\mathbf{n} = \mathfrak{A}_3 \cdot \mathbf{t},$$

где \mathcal{E}_3 – это уже знакомый нам тензор поворота вектора, лежащего в плоскости $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, на угол $\pi/2$ против часовой стрелки.

Отметим, что для определения вектора \mathbf{x} в полярной системе координат достаточно знать только два параметра: длину заданного вектора $x = |\mathbf{x}|$ и угол φ между вектором \mathbf{x} и началом отсчета \mathbf{t} . Тогда вектор \mathbf{x} можно определить следующим образом

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_t + \mathbf{x}_n = \underbrace{t x \cos \varphi}_{x_t} + \underbrace{\mathcal{E}_3 \cdot t x \sin \varphi}_{x_n}.$$

Теперь от полярной системы координат перейдем к рассмотрению цилиндрической. **Цилиндрическая система координат** определяются в пространстве полюсом O и двумя единичными векторами \mathbf{t} и \mathbf{k} (рис. 2.8). Вектор \mathbf{k} – это единичный вектор вдоль оси цилиндрических координат z , а вектор \mathbf{t} – это единичный вектор, ортогональный вектору \mathbf{k} и, как и в полярной системе координат, определяющий начало отсчета угловой координаты φ .

Для определения вектора \mathbf{x} в цилиндрической системе координат достаточно знать три скалярных параметра ρ , z и φ :

$$\mathbf{x} = \underbrace{\rho_t + \rho_n}_{\rho} + z\mathbf{k} = \underbrace{t \rho \cos \varphi}_{\rho_t} + \underbrace{\mathcal{E}_3 \cdot t \rho \sin \varphi}_{\rho_n} + z\mathbf{k}.$$

Параметры ρ и z можно выразить через определяющие векторы цилиндрической системы координат, при этом удобно использовать проецирующий тензор $\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I} - \mathbf{k}\mathbf{k}$ (обладающий свойством $\tilde{\mathbf{I}} \cdot \tilde{\mathbf{I}} = \tilde{\mathbf{I}}$):

$$\rho = |\boldsymbol{\rho}| = \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}} = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \tilde{\mathbf{I}} \cdot \tilde{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \tilde{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{x}}, \quad z = |z| = \mathbf{x} \cdot \mathbf{k}.$$

Для определения угла φ необходимо знать его косинус и синус:

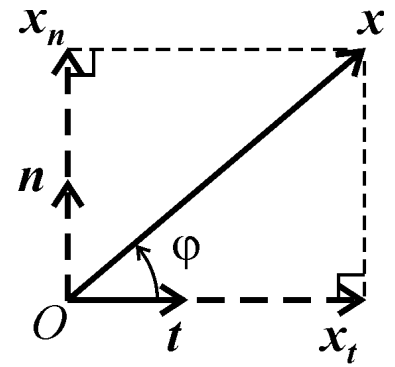


Рис. 2.7. Полярная система координат

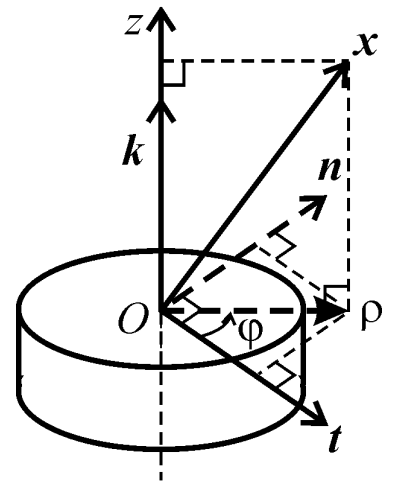


Рис. 2.8. Цилиндрическая система координат

$$\cos \varphi = \frac{t \cdot \rho}{\rho}, \quad \sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}.$$

2.10. Инвариантные числа двухвалентного тензора

Известно, что координаты любого тензора, проекции векторов и тензоров на координатные оси зависят от выбора базиса. Однако с помощью этих величин можно получать выражения, которые будут одинаковыми в любой системе координат. Такие величины, не зависящие от выбора системы координат, называются **инвариантными**. Инвариантными величинами являются все векторы и тензоры, а также их суммы и любые произведения – тензорные, скалярные и векторные.

Основным инвариантом вектора является его длина. Например, длина вектора \mathbf{x} в любом декартовом базисе может быть вычислена следующим образом:

$$\sqrt{x_i x_i} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Теперь рассмотрим некий двухвалентный тензор \mathbf{A} и перечислим некоторые наиболее часто употребляемые его инварианты:

$$J_1 = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{1} \quad \text{– скалярная свертка;}$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix};$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \quad \text{– определитель матрицы.}$$

Зная перечисленные три инварианта, можно определить еще три – главные числа этого тензора:

$$\lambda^3 - J_1 \lambda^2 + J_2 \lambda - J_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3.$$

2.11. Контрольные вопросы задачи для закрепления материала

Вопросы для закрепления материала

- Что называется Евклидовым пространством? Чем оно отличается от линейного?
- В каком случае координаты вектора не являются его проекциями на базисные оси?
- Что представляют собой проекции тензора (скалярные и векторные)?
- Что такое скалярная свертка? Как она влияет на валентность тензора?

- Чему равна скалярная свертка двухвалентного тензора, заданного в матричной форме?
- Какой базис называют декартовым?
- В каком случае скалярное произведение вектора и двухвалентного тензора будет коммутативно?
- Как осуществляется двойное скалярное произведение?
- Почему единичный тензор называют изотропным?
- Какова матрица единичного тензора?
- Чему равна скалярная свертка единичного тензора?
- Почему единичный тензор называют тензором тождественного преобразования?
- Что такое собственные числа и собственные векторы двухвалентного симметричного тензора?
- Что представляет собой альтернирующий тензор? Как на него влияет правизна декартового базиса?
- Можно ли отнести альтернирующий тензор к изотропным?
- Что представляет собой векторное произведение?
- В чем состоит геометрический смысл векторного произведения двух векторов.
- Что такое векторная свертка? Как она влияет на валентность тензора?
- Чему равна векторная свертка симметричного тензора?
- Чему равна векторная свертка двухвалентного кососимметричного тензора?
- Чему равна векторная свертка единичного тензора?
- Какой линейный оператор в результате линейного преобразования не изменяет вектора?
- Какой линейный оператор в результате линейного преобразования не изменяет двухвалентного тензора?
- Какой линейный оператор используют для выделения скалярной свертки двухвалентного тензора?
- Какие линейные операторы используют для выделения шаровой части тензора и его девиатора?
- Какой линейный оператор проецирует вектор на плоскость, заданную единичной нормалью \mathbf{n} ?
- Какой линейный оператор проецирует вектор на плоскость, заданную единичной нормалью \mathbf{n} , а затем поворачивает на угол $\pi/2$ против часовой стрелки?
- Какую систему координат называют цилиндрической? Полярной? Чем определяются эти системы?
- Как определяют векторы в цилиндрической системе координат? В полярной системе?
- Какое основное инвариантное число есть у вектора?
- Какие инвариантные числа есть у двухвалентного тензора?

Задачи для самостоятельного решения

- Доказать, что двойное скалярное произведение симметричного и кососимметричного тензора равно нулю.
- Доказать, что операция скалярной свертки двухвалентного тензора эквивалентна его двукратному скалярному умножению на единичный тензор.
- Доказать, что скалярная свертка кососимметричного тензора равна нулю.
- Доказать, что скалярная свертка несимметричного тензора равна свертке его симметричной составляющей.
- Записать результат скалярных произведений в тензорной форме:

$$T \cdot \cdot II, \quad T \cdot \cdot \underset{2T3}{II}, \quad T \cdot \cdot \underset{1T4}{II}, \quad T \cdot \cdot \underset{2T4}{II}.$$

- Свернуть скалярно и упростить выражение:

$$\Delta \sigma + \nabla F + F \nabla - \frac{\mu}{1+\mu} \Delta \sigma I + \frac{1}{1+\mu} \nabla \nabla \sigma = 0,$$

где μ – скаляр; F и ∇ – векторы; $\nabla \cdot \nabla \equiv \Delta$; σ – симметричный двухвалентный тензор.

- Определить оператор линейного преобразования, зеркально отражающий векторы относительно плоскости с нормалью n .
- Определить такие тензоры A и B , чтобы выполнялись равенства:

$$A \cdot \cdot A = A, \quad B \cdot \cdot B = B, \quad A \cdot \cdot B = 0.$$

- Вычислить результат векторных свертков:

$$\underset{1 \otimes 2}{\mathfrak{E}}, \quad \underset{1 \otimes 3}{\mathfrak{E}}.$$

- Укажите главное направление тензора $I \times a$.
- Доказать равносильность выражений

$$a \times b b \times a = 0 \Leftrightarrow \underset{1T2}{(abba + abba)}_{3K4} = 0.$$