1. ТЕНЗОРЫ В ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В первой главе введем понятия полиады, тензора и тензорного произведения, опираясь на уже известные понятия скаляра и вектора; определим основные действия с тензорами в линейном пространстве и введем матрицы перехода от одного базиса к другому.

1.1. Скаляры и векторы

Линейным пространством называют множество элементов (векторов), которые можно складывать и умножать на число (скаляр), получая при этом элементы того же пространства. Будем обозначать скаляры греческими буквами (например: α, β, χ, δ), а векторы – жирными латинскими буквами (например: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$). Впрочем, когда это будет удобно, от этих правил будем отступать.

Скаляры – это обычные числа. С ними можно производить следующие операции:

- сложение «$+$»;
- вычитание «–»;
- деление « : »;
- умножение « $*$ » (иногда символ « $*$ » будем опускать).

Вектор – это совокупность величины и направления. Сам по себе вектор не имеет точки приложения: его можно переносить в любую точку пространства, и он при этом не изменится. Однако физические векторные величины (скорость, сила, перемещение и т.д.), как правило, принадлежат какой-то конкретной точке пространства и произвольно менять их точку приложения нельзя.

С векторами можно производить две операции (рис.1.1): сложение

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$$

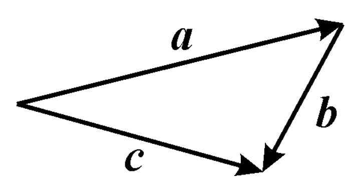
и умножение на скаляр (по-другому, удлинение или укорочение вектора)

$$\lambda*\boldsymbol{a}\equiv\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\text{, где }\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}.$$

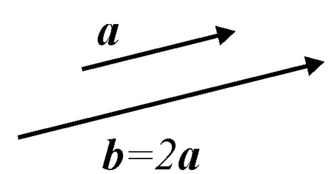
В рассматриваемом линейном неметрическом пространстве невозможно измерять величину и направления. Мера для измерения этих величин появится в специальном – метрическом линейном пространстве, которое будет рассмотрено позже – после введения скалярного произведения. Однако следует подчеркнуть, что само понятие тензора не требует, чтобы пространство было метрическим.

Линейной формой векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называют следующий вектор

$$\boldsymbol{f}=\lambda\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}.$$



а) Сложение векторов



б) Удлинение вектора

Рис.1.1.

Если при любых λ, β и γ линейная форма не равна нулю, то векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ можно использовать в качестве ***базиса линейного пространства***. Максимальное количество линейно независимых векторов называется ***размерностью пространства***. Таким образом, в качестве базиса можно использовать любые линейно независимые векторы, при условии, что их количество не ниже размерности пространства.

Если $\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ (при условии $\lambda \neq 0$), то векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называют ***коллинеарными***, а если $\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ (при условиях: $\lambda \neq 0$ и $\gamma \neq 0$), то векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называют ***компланарными***.

1.2. Тензорное произведение. Полиада

Изучение более сложных объектов – тензоров начнем с введения понятия о тензорном произведении. ***Тензорное произведение*** (неопределенное произведение) связывает произвольное количество скаляров и векторов в некий новый объект – ***полиаду***:

$$\boldsymbol{A} = \lambda * \boldsymbol{a} * \mu * \beta * \boldsymbol{b} * \boldsymbol{c}.$$

Полиада – это тензорное произведение произвольного количества скаляров и векторов. Полиады обладают следующими свойствами.

- Коммутативность скаляров (то есть скаляры можно помещать в любое место полиады, при этом полиада не изменится):

$$\lambda * \mu = \mu * \lambda \text{ или } \lambda * \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} * \lambda.$$

- Некоммутативность векторов (очередность векторов в полиаде менять нельзя, в противном случае полиада превратится в новую полиаду):

$$\boldsymbol{b} * \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}.$$

- Ассоциативность:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) * \boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc},$$

$$(\alpha + \beta) * \boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{a}.$$

Согласно перечисленным свойствам полиад:

$$\boldsymbol{A} = \lambda * \boldsymbol{a} * \mu * \beta * \boldsymbol{b} * \boldsymbol{c} = \gamma \boldsymbol{abc} \; (= \boldsymbol{a} \gamma \boldsymbol{bc} = \boldsymbol{ab} \gamma \boldsymbol{c} = \boldsymbol{abc} \gamma), \text{ где } \gamma = \mu \beta \lambda;$$

$$\boldsymbol{B} = \alpha * \beta * \boldsymbol{a} * \gamma = \lambda \boldsymbol{a} \; (= \boldsymbol{a} \lambda), \text{ где } \lambda = \alpha \beta \gamma;$$

$$\boldsymbol{C} = \alpha * \beta * \gamma = \lambda.$$

Количество векторов, входящих в тензорное произведение определяет его ***валентность***:

- ноль-валентная полиада (α, β, χ, λ) – это скаляр;
- одновалентная полиада ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{f}$, $\overline{\boldsymbol{T}}$) – это обычный вектор;

- диада ($\boldsymbol{ab}$, $\boldsymbol{c} * \boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{ba}$, $\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}$) – это тензорное произведение двух векторов;
- триада ($\boldsymbol{abc}$, $\boldsymbol{c} * \boldsymbol{d} * \boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{bca}$, $\overline{\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}}$);
- квадриада ($\boldsymbol{abca}$, $\boldsymbol{abba}$, $\overline{\overline{\overline{\overline{\boldsymbol{T}}}}}$).

1.3. Тензоры

Тензор – это сумма произвольного числа полиад одной валентности, кроме того, тензорами также являются скаляры, векторы и полиады.

Валентность тензора равна валентности составляющих его полиад. Например:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{ab},\ \boldsymbol{K} = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{cd}$$ – двухвалентные тензоры;

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{abc} + \boldsymbol{cdh},\ \boldsymbol{C} = \lambda\boldsymbol{abc} + \delta\boldsymbol{cd}\gamma\boldsymbol{h}$$ – трехвалентные тензоры;

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{ab} + \lambda,\ \boldsymbol{D} = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{fgh}$$ – вообще не тензоры.

Сумма двух диад, например $\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ce}$, является диадой только в том случае, когда коллинеарны первые векторы слагаемых диад или вторые векторы ($\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{c}$ или $\boldsymbol{b} \parallel \boldsymbol{e}$). Пусть, например, $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{c}$, тогда $\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a}$, следовательно, сумма

$$\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ce} = \boldsymbol{ab} + \lambda\boldsymbol{ae} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \lambda\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{ah}$$

представляет собой диаду.

Перечислим основные действия с тензорами в линейном пространстве:

- Умножение на скаляр:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{cd} \Rightarrow \boldsymbol{C} = \lambda\boldsymbol{T} = \lambda(\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{cd}) = \lambda\boldsymbol{ab} + \lambda\boldsymbol{cd}.$$

- Сложение:

$$\begin{cases} \boldsymbol{T} = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{cd} \\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{gh} + \boldsymbol{jk} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{T} = \boldsymbol{gh} + \boldsymbol{jk} + \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{cd}.$$

- Умножение на тензор:

$$\begin{cases} \boldsymbol{T} = \boldsymbol{ab} \\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{gh} + \boldsymbol{jk} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} * \boldsymbol{T} = (\boldsymbol{gh} + \boldsymbol{jk})\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ghab} + \boldsymbol{jkab}.$$

- Транспонирование – перемена местами векторов в полиаде:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{ab} \Rightarrow \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{ba} \equiv \underset{\mathrm{T}}{\boldsymbol{T}};$$

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{abc} + \boldsymbol{egh} \Rightarrow \underset{1\mathrm{T}2}{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{bac} + \boldsymbol{geh},\ \underset{1\mathrm{T}3}{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{cba} + \boldsymbol{hge},\ \underset{\substack{1\mathrm{T}3 \\ 1\mathrm{T}2}}{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{bca} + \boldsymbol{ghe}.$$

Если тензор не меняется при транспонировании, то его называются ***симметричным*** тензором:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{aa} = \underset{\mathrm{T}}{\boldsymbol{A}}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{cd} + \boldsymbol{gh} + \boldsymbol{hg} + \boldsymbol{dc} = \underset{\mathrm{T}}{\boldsymbol{B}};$$

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{aba} = \underset{1\mathrm{T}3}{\boldsymbol{T}}, \qquad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{aabd} = \underset{1\mathrm{T}2}{\boldsymbol{C}}.$$

Кососимметричными называются тензоры, транспонирование которых равносильно умножению на (-1):

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{cd} - \boldsymbol{dc} \qquad \to \quad \underset{\mathrm{T}}{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{dc} - \boldsymbol{cd} = (-1) * \boldsymbol{B};$$

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{ceab} - \boldsymbol{ceba} \ \to \quad \boldsymbol{T} * (-1) = -\boldsymbol{ceab} + \boldsymbol{ceba} = \underset{3\mathrm{T}4}{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{ceba} - \boldsymbol{ceab}.$$

Симметрирование – это выделение симметричной части тензора:

$$\underset{\mathrm{S}}{\boldsymbol{T}} \equiv \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{S}} \equiv \boldsymbol{S} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{T} + \underset{\mathrm{T}}{\boldsymbol{T}});$$

Кососимметрирование – выделение кососимметричной части тензора:

$$\underset{\mathrm{K}}{\boldsymbol{T}} \equiv \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{K}} \equiv \boldsymbol{K} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{T} - \underset{\mathrm{T}}{\boldsymbol{T}}).$$

Добавим, что любой тензор $\boldsymbol{T}$ можно единственным образом разложить на симметричную и кососимметричную части:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{S}} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{K}}.$$

1.4. Координаты тензора

Размерность, определяемая общим числом базисных векторов, – это крайне важная черта любого пространства. Физическое пространство будем считать трехмерным. Базис в физическом пространстве – это совокупность трех линейно независимых векторов. В линейном пространстве, в отличие от Евклидового, не существует понятия о длинах и углах, поэтому говорить о модулях базисных векторов не имеет смысла. Обозначать базисные векторы будем следующим образом:

$$\{\ \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\} \text{ или } \{\ \underset{1}{\boldsymbol{e}}, \underset{2}{\boldsymbol{e}}, \underset{3}{\boldsymbol{e}}\ \}.$$

В трехмерном пространстве с заданным базисом вектор $\boldsymbol{x}$ можно представить в координатной форме (разложить по базису) следующим образом (рис.1.2):

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3.$$

В этом выражении x_1, x_2, x_3 – это скалярные величины – координаты вектора; $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ – это базисные векторы.

Не следует путать координаты вектора с его проекциями на базисные направления. В линейном пространстве не существует понятия о скалярном произведении и, следовательно, термин «проекция» не имеет смысла.

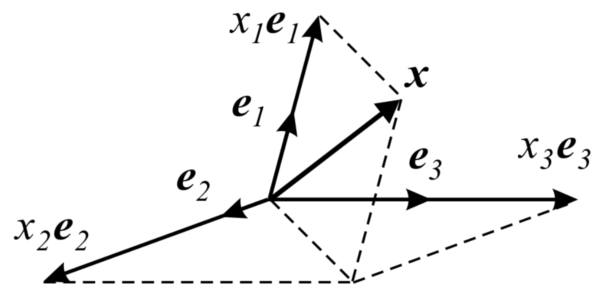


Рис.1.2. Разложение вектора по базису

Для удобства в дальнейшем нередко будем использовать в записях ***правило Эйнштейна*** – правило суммирования по двум повторяющимся индексам. Согласно этому правилу, заданный вектор

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\boldsymbol{e}_i$$

можно представить в следующей форме:

$$\boldsymbol{x} \equiv x_i\boldsymbol{e}_i.$$

То есть, согласно правилу Эйнштейна, при суммировании по двум повторяющимся индексам знак суммы можно опускать, так как известно, что размерность физического пространства равна трем. В этом выражении i – это немой индекс и его можно заменить любой другой буквой, например j (тогда получим $\boldsymbol{x} = x_j\boldsymbol{e}_j$). А в выражении

$$\boldsymbol{x}_k = \alpha * \boldsymbol{e}_k$$

правую часть нельзя записать, как сумму $\alpha * \boldsymbol{e}_1 + \alpha * \boldsymbol{e}_2 + \alpha * \boldsymbol{e}_3$, это выражение эквивалентно трем другим:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = \alpha * \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 = \alpha * \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 = \alpha * \boldsymbol{e}_3 \end{cases} \text{– это три вектора.}$$

Здесь k – *открытый индекс*. Если изменить его в правой части выражения, то необходимо изменить его и левой части тоже: $\boldsymbol{x}_n = \alpha * \boldsymbol{e}_n$.

Координаты вектора иногда удобно записывать в виде *матрицы*, которая всегда представляет собой столбец, включающий в себя (в физическом пространстве) три ячейки, содержащие координаты вектора. Например, матрица вектора

$$\boldsymbol{a} = \alpha_i\boldsymbol{e}_i = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \alpha_3\boldsymbol{e}_3,$$

представляет собой следующее:

$$[\boldsymbol{a}] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

Теперь перейдем к рассмотрению координатной формы записи тензоров. Для начала рассмотрим простейший тензор – диаду $\boldsymbol{ab}$ и представим ее в координатной форме (разложим по базису):

$$\boldsymbol{ab} = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3)(b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) =$$

$$= a_1b_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + a_1b_2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + a_1b_3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 + a_2b_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 + \ldots =$$

$$= (a_i\boldsymbol{e}_i)(b_k\boldsymbol{e}_k) = a_ib_k\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k.$$

В этом выражении для векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ введены разные индексы. Если этого не сделать, то запись будет неверной:

$$\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 \neq \boldsymbol{ab}$$

так как, согласно правилу Эйнштейна, суммирование необходимо производить по повторяющимся индексам: – вместо 9-ти слагаемых получается три.

Любая диада является двухвалентным тензором, поэтому диаду $\boldsymbol{ab}$ можно записать так:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{ab} = a_ib_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j,$$

где $T_{ij} = a_ib_j$ – *координаты тензора* $\boldsymbol{T}$. Координаты двухвалентного тензора удобно записывать в виде матрицы, ячейки которой содержат координаты тензора при соответствующих базисных диадах, причем первый индекс меняется по строкам, второй по столбцам. Например, матрица тензора $\boldsymbol{T} = T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ имеет следующий вид:

$$[\boldsymbol{T}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}.$$

Здесь T_{23} – это координата при базисной диаде $\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ в координатной форме записи этого тензора.

Запишем матрицу рассмотренной ранее диады $\boldsymbol{ab}$ в двух разных базисах:

$$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\} \text{ и } \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$$

(здесь вектор $\boldsymbol{c}$ – это любой вектор, который образовывает совместно с векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ базис), причем при неизменности тензора $\boldsymbol{ab}$ матрицы будут отличаться друг от друга и содержать разные координаты. В базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$

$$[\boldsymbol{ab}] = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} \text{ (ранг равен единице),}$$

а в базисе $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ тензор содержит всего одну ненулевую координату, соответствующую самой диаде $\boldsymbol{ab}$ (коэффициент перед ней равен единице):

$$[\boldsymbol{ab}]' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (ранг не изменился).}$$

Итак, мы выяснили, что матрица вектора в трехмерном пространстве представляет собой столбец с тремя ячейками, каждая из которых соответствует базисному вектору, а матрица двухвалентного тензора является квадратной и содержит девять ячеек, соответствующих базисным диадам.

Что касается тензоров более высоких валентностей, то их обычно в матричной форме не записывают, в противном случае приходилось бы вводить специальные правила записи матриц и оперирования с ними. Трехвалентный тензор в общем случае содержит 27 линейно независимых триад:

$$\boldsymbol{J} = \underbrace{(J_{111}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + J_{121}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + \ldots)\boldsymbol{e}_1}_{\textbf{\textit{9 слагаемых}}} + \underbrace{(J_{112}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots)\boldsymbol{e}_2}_{\textbf{\textit{9 слагаемых}}} + \underbrace{(J_{113}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots)\boldsymbol{e}_3}_{\textbf{\textit{9 слагаемых}}},$$

четырехвалентный – 81 линейно независимую квадриаду. И так далее: z-валентный тензор может содержать 3^z линейно независимых полиад (основание степени отражает размерность пространства).

До сих пор в качестве координат тензора $\boldsymbol{T}$ выступали скалярные величины, однако это могут быть и векторы. Например, в правой части этого выражения

$$\boldsymbol{T} = T_{ik}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k = (T_{1k}\boldsymbol{e}_1 + T_{2k}\boldsymbol{e}_2 + T_{3k}\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{t}_i\boldsymbol{e}_k.$$

стоит сумма трех диад $\boldsymbol{t}_1\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{t}_2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{t}_3\boldsymbol{e}_3$, в которой векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ – это базисные векторы, а коэффициенты при них – координаты – это тоже векторные величины

$$\boldsymbol{t}_i = T_{ik}\boldsymbol{e}_i.$$

Матрицы этих векторов представляют собой столбцы матрицы тензора $\boldsymbol{T}$

$$[\boldsymbol{T}]=[[\boldsymbol{t}_1] \quad [\boldsymbol{t}_2] \quad [\boldsymbol{t}_3]], \quad \text{где} \quad [\boldsymbol{t}_i]=\begin{bmatrix} T_{1i} \\ T_{2i} \\ T_{3i} \end{bmatrix}, \quad i=1 \dots 3.$$

Перечислим ***действия с тензорами в тензорной, координатной и матричной форме***.

- Умножение на скаляр:

$$\boldsymbol{A}=\beta\boldsymbol{T} \;\rightarrow\; A_{ij}=\beta T_{ij},\ [\boldsymbol{A}]=\beta[\boldsymbol{T}].$$

- Сложение:

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \;\rightarrow\; T_{ij}=A_{ij}+B_{ij},\ [\boldsymbol{T}]=[\boldsymbol{A}]+[\boldsymbol{B}].$$

- Транспонирование:

$$\boldsymbol{B}=\underset{\mathrm{T}}{\boldsymbol{T}} \;\rightarrow \boldsymbol{B}=T_{ji}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=T_{ij}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i,\ [\boldsymbol{B}]=[\boldsymbol{T}]^{\mathrm{T}}.$$

- Умножение:

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{ab} \;\rightarrow\; T_{ij}=a_i b_j,\ [\boldsymbol{T}]=[\boldsymbol{a}][\boldsymbol{b}]^{\mathrm{T}}.$$

Ранг тензора r равен рангу его матрицы. В физическом (трехмерном) пространстве ранг диады равен $r=1$; ранг суммы двух диад, не являющейся диадой $r=2$; ранг суммы трех и более диад не может превышать трех ($r \le 3$), что обусловлено размерностью физического пространства.

Пример №1. Определить, чему равен ранг тензора $\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ad}$.

Решение:

$$\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ad}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{ac}, \qquad \boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}.$$

Объект $\boldsymbol{ac}$ – это диада и ее ранг равен единице, следовательно, ранг исходного тензора $\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ad}$ тоже равен единице.

Если ранг двухвалентного тензора меньше размерности пространства, то такой тензор называется ***вырожденным*** и определитель его матрицы равен нулю.

1.5. Преобразование координат при смене базиса

Пусть в линейном пространстве выбраны две различные системы базисных векторов $\{\boldsymbol{e}_i\}$ – старый базис и $\{\boldsymbol{h}_k\}$ – новый базис. Тогда произвольный вектор $\boldsymbol{x}$ можно записать в новом и в старом базисе следующим образом:

$$\boldsymbol{x}=x_i\boldsymbol{e}_i=x'_k\,\boldsymbol{h}_k.$$

Очевидно, что векторы нового базиса можно разложить по старому базису и, аналогично, векторы старого базиса – по новому:

$$\boldsymbol{h}_k = (h_k)_i \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{e}_k = (e_k)'_m \boldsymbol{h}_m.$$

Запишем матрицы перехода:

- от старого к новому базису:

$$\left[E'\right] = \left[\, \left[\boldsymbol{e}'_1\right] \quad \left[\boldsymbol{e}'_2\right] \quad \left[\boldsymbol{e}'_3\right] \,\right],$$

столбцами этой матрицы являются координаты векторов старого базиса в новом.

- от нового базиса к старому:

$$\left[H\right] = \left[\, \left[\boldsymbol{h}_1\right] \quad \left[\boldsymbol{h}_2\right] \quad \left[\boldsymbol{h}_3\right] \,\right],$$

столбцами этой матрицы являются координаты векторов нового базиса в старом.

Запишем теперь связь между координатами рассматриваемого вектора $\boldsymbol{x}$ в старом и новом базисе:

$\left[\boldsymbol{x}\right] = \left[H\right]\left[\boldsymbol{x}'\right]$ – матрица координат в старом базисе,

$\left[\boldsymbol{x}'\right] = \left[E'\right]\left[\boldsymbol{x}\right]$ – матрица координат в новом базисе.

Из последних выражений легко заметить, что матрицы $\left[H\right]$ и $\left[E'\right]$ являются обратными, то есть

$$\left[H\right] = \left[E'\right]^{-1} \text{ и } \left[H\right]\left[E'\right] = \left[E'\right]\left[H\right] = \left[I\right].$$

Здесь $\left[I\right]$ – единичная матрица (матрица единичного тензора $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i$, речь о котором пойдет позже).

Для двухвалентного тензора

$$\boldsymbol{T} = T_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = T'_{kl}\, \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_l$$

связь между координатами в старом и новом базисе будет следующей:

$\left[\boldsymbol{T}\right] = \left[H\right]\left[\boldsymbol{T}'\right]\left[H\right]^{\mathrm{T}}$ – матрица координат тензора $\boldsymbol{T}$ в старом базисе,

$\left[\boldsymbol{T}'\right] = \left[E'\right]\left[\boldsymbol{T}\right]\left[E'\right]^{\mathrm{T}}$ – матрица координат тензора $\boldsymbol{T}$ в новом базисе.

Пример №2. Определим координаты вектора

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$$

в базисе $\{\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3\}$, а также найдем матрицу перехода от этого базиса к базису $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$:

$$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2, \ \boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{h}_3 \text{ и } \boldsymbol{c} = \boldsymbol{h}_1 + 3\boldsymbol{h}_2.$$

Решение:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2 - 6\boldsymbol{h}_3 - \boldsymbol{h}_1 - 3\boldsymbol{h}_2 = \boldsymbol{h}_1 - 4\boldsymbol{h}_2 - 6\boldsymbol{h}_3,$$

то есть вектор $\boldsymbol{x}$ в базисе $\{\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3\}$ имеет координаты:

$$[\boldsymbol{x}'] = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Выразим базисные векторы $\{\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3\}$ через заданные векторы $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$:

$$\boldsymbol{c} + 3\boldsymbol{a} = \boldsymbol{h}_1 + 3\boldsymbol{h}_2 + 6\boldsymbol{h}_1 - 3\boldsymbol{h}_2 = 7\boldsymbol{h}_1 \Rightarrow \boldsymbol{h}_1 = \frac{3}{7}\boldsymbol{a} + \frac{1}{7}\boldsymbol{c},$$

$$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2 \Rightarrow \boldsymbol{h}_2 = 2\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{a} = -\frac{1}{7}\boldsymbol{a} + \frac{2}{7}\boldsymbol{c},$$

$$\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{h}_3 \Rightarrow \boldsymbol{h}_3 = -\frac{1}{3}\boldsymbol{b}.$$

Отсюда найдем матрицу перехода от базиса $\{\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3\}$ к базису $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$:

$$[H] = [[\boldsymbol{h}_1] \quad [\boldsymbol{h}_2] \quad [\boldsymbol{h}_3]] = \begin{bmatrix} 3/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \\ 1/7 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для проверки полученного результата запишем вектор $\boldsymbol{x}$ с помощью матрицы $[H]$ в первоначальном базисе $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$:

$$[\boldsymbol{x}] = [H][\boldsymbol{x}'] = \begin{bmatrix} 3/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \\ 1/7 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

то есть $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$.

Пример №3. Определим координаты тензора

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{ab} - \boldsymbol{cd}$$

в базисе $\{\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3\}$ и в базисе $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$, если заданы векторы:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{h}_1 + 2\boldsymbol{h}_2,\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{h}_2 + 3\boldsymbol{h}_3,\ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2 \text{ и } \boldsymbol{d} = \boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_2 - 2\boldsymbol{h}_3.$$

Решение:

$$\boldsymbol{ab} = (\boldsymbol{h}_1 + 2\boldsymbol{h}_2)(\boldsymbol{h}_2 + 3\boldsymbol{h}_3) = \boldsymbol{h}_1\boldsymbol{h}_2 + 2\boldsymbol{h}_2\boldsymbol{h}_2 + 3\boldsymbol{h}_1\boldsymbol{h}_3 + 6\boldsymbol{h}_2\boldsymbol{h}_3,$$

$$\boldsymbol{cd} = (\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2)(\boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_2 - 2\boldsymbol{h}_3) =$$

$$= \boldsymbol{h}_1\boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_1\boldsymbol{h}_2 - 2\boldsymbol{h}_1\boldsymbol{h}_3 - \boldsymbol{h}_2\boldsymbol{h}_1 - \boldsymbol{h}_2\boldsymbol{h}_2 + 2\boldsymbol{h}_2\boldsymbol{h}_3.$$

То же самое в матричной форме:

$$[\boldsymbol{ab}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ [\boldsymbol{cd}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда найдем матрицу тензора $\boldsymbol{T}$ в базисе { $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3$ }:

$$[\boldsymbol{T}'] = [\boldsymbol{ab}] - [\boldsymbol{cd}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

то есть в базисе { $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3$ } тензор $\boldsymbol{T}$ имеет вид:

$$\boldsymbol{T} = -\boldsymbol{h}_1\boldsymbol{h}_1 + 5\boldsymbol{h}_1\boldsymbol{h}_3 + \boldsymbol{h}_2\boldsymbol{h}_1 + 3\boldsymbol{h}_2\boldsymbol{h}_2 + 4\boldsymbol{h}_2\boldsymbol{h}_3.$$

Выразим базисные векторы { $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3$ } через заданные векторы { $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ }:

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{h}_1 + 2\boldsymbol{h}_2 - \boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_2 = 3\boldsymbol{h}_2 \Rightarrow \boldsymbol{h}_2 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}),$$

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}) + 3\boldsymbol{h}_3 \Rightarrow \boldsymbol{h}_3 = -\frac{1}{9}\boldsymbol{a} + \frac{1}{3}\boldsymbol{b} + \frac{1}{9}\boldsymbol{c},$$

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{h}_1 + \frac{1}{3}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}) \Rightarrow \boldsymbol{h}_1 = \frac{1}{3}\boldsymbol{a} + \frac{2}{3}\boldsymbol{c}.$$

Запишем матрицу перехода от базиса { $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3$ } к базису { $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ }:

$$[H] = [[\boldsymbol{h}_1] \quad [\boldsymbol{h}_2] \quad [\boldsymbol{h}_3]] = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/9 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 1/9 \end{bmatrix}.$$

С помощью матрицы $[H]$ теперь можно определить матрицу тензора $\boldsymbol{T}$ в базисе $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$:

$$[\boldsymbol{T}] = [H][\boldsymbol{T}'][H]^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/9 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 1/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/9 & 1/3 & 1/9 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/9 & 1/3 & 1/9 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8/9 & 2/3 & -1/9 \end{bmatrix},$$

то есть в базисе $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ тензор $\boldsymbol{T}$ имеет вид:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{ab} - \frac{8}{9}\boldsymbol{ca} + \frac{2}{3}\boldsymbol{cb} - \frac{1}{9}\boldsymbol{cc}.$$

1.6. Контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения

Вопросы для закрепления материала

- Что называется линейным пространством? Каковы его элементы?
- Какие признаки линейности вы знаете?
- Что такое полиада?
- Какой объект называется тензором?
- В каком случае сумма двух диад представляет собой диаду?
- Что представляют собой валентность и ранг тензора?
- Что называют размерностью линейного пространства?
- Каково определение базиса линейного пространства?
- Что представляют собой координаты вектора?
- Что представляют собой координаты тензора?
- Всегда ли координаты тензора являются скалярными величинами? Обоснуйте ответ.
- Для чего используют матричную форму записи тензоров? Что она собой представляет?

- Каковы в линейном пространстве операции со скалярами, векторами и тензорами (перечислить действия в тензорной, координатной и матричной форме)?
- Какие тензоры называют симметричными, а какие – кососимметричным?
- Каким образом из двухвалентного тензора выделяют симметричную часть? Кососимметричную?
- Какова связь между симметричной и кососимметричной частями двухвалентного тензора?
- Как преобразуют координаты вектора при переходе к новому базису?
- Каким образом преобразуют координаты двухвалентного тензора при переходе к новому базису?

Задачи для самостоятельного решения

- Каким образом можно построить линейное пространство (то есть определить какими-либо правилами умножение на число и сложение элементов пространства так, чтобы выполнялись условия линейности), элементами которого является множество точек на плоскости?
- Укажите, какие из перечисленных ниже объектов являются тензорами, определите валентность этих тензоров.

$$0,\ \boldsymbol{0},\ \overline{\overline{\boldsymbol{0}}},\ -42,\ \boldsymbol{d},\ -\boldsymbol{a}8\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}-7\boldsymbol{ab},\ \boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{ab}+\boldsymbol{cd},\ \boldsymbol{abf}7\boldsymbol{e}.$$

- Определите ранг тензоров в трехмерном пространстве:
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3.$$
- Докажите, что координаты тензора $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ связаны с координатами тензоров $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ равенствами $A_{ij}+B_{ij}=C_{ij}$.
- Изобразите на плоскости вектор $\boldsymbol{x}=-3\boldsymbol{e}_1+5\boldsymbol{e}_2$ (базисные векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ задайте произвольно). Определите координаты этого вектора в базисе $\boldsymbol{c}_1=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{c}_2=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$.
- Найдите координаты тензора $\boldsymbol{T}=2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{cd}$ в базисе { $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$, $\boldsymbol{h}_3$ } и в базисе { $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ }, если заданы векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{h}_1+\boldsymbol{h}_2$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{h}_2-\boldsymbol{h}_3$, $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{h}_1-\boldsymbol{h}_3$ и $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{h}_1+\boldsymbol{h}_2-2\boldsymbol{h}_3$.