ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Теоретическая механика – наука об общих законах движения и равновесия материальных тел и о возникающих при этом механических взаимодействиях между телами

Движение (механическое движение) – это изменение с течением времени положения данного тела в пространстве по отношению к другим телам

Равновесие – это состояние покоя тела по отношению к другим материальным телам

Механическое взаимодействие между телами – это вид взаимодействия, при котором происходит изменение движения этих тел или изменение их формы (деформация)

Мера механического взаимодействия между телами в механике называется **силой**

МАТЕРИАЛЬНЫЕ ОБЪЕКТЫ

1. **Материальная точка** (МТ, в дальнейшем иногда слово «материальная» будем опускать) – это тело, имеющее массу, размерами которого при изучении его движения можно пренебречь
2. **Абсолютно твердое тело** (АТТ, в дальнейшем – «твердое тело») – тело, расстояние между любыми двумя точками которого всегда остается постоянным
3. **Механической системой** (МС) материальных точек или твердых тел называется такая их совокупность, в которой положение или движение каждой точки (или тела) зависит от положения и движения всех остальных

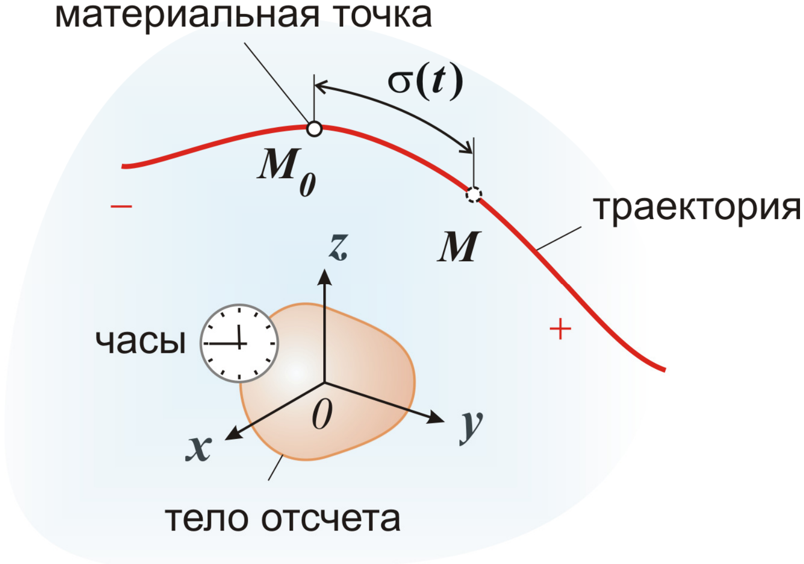
Основная задача теоретической механики: изучение общих законов движения и равновесия материальных тел под действием приложенных к ним сил

Основные разделы теоретической механики:
1. Кинематика (изучает движение материальных объектов без учета масс и сил)
2. Статика (изучает условия равновесия материальных объектов под действием сил)
3. Динамика (изучает законы движения материальных объектов под действием сил)

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. КИНЕМАТИКА

Кинематика – это раздел теоретической механики, изучающий движение материальных объектов без учета масс и сил

КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ



Система отсчета – это *система координат*, жестко связанных с *телом отсчета*, снабженная *часами* (для простоты ограничимся использованием декартовых координат: x, y, z; пространство – трехмерное евклидово пространство; время t – скалярная непрерывно изменяющаяся величина)

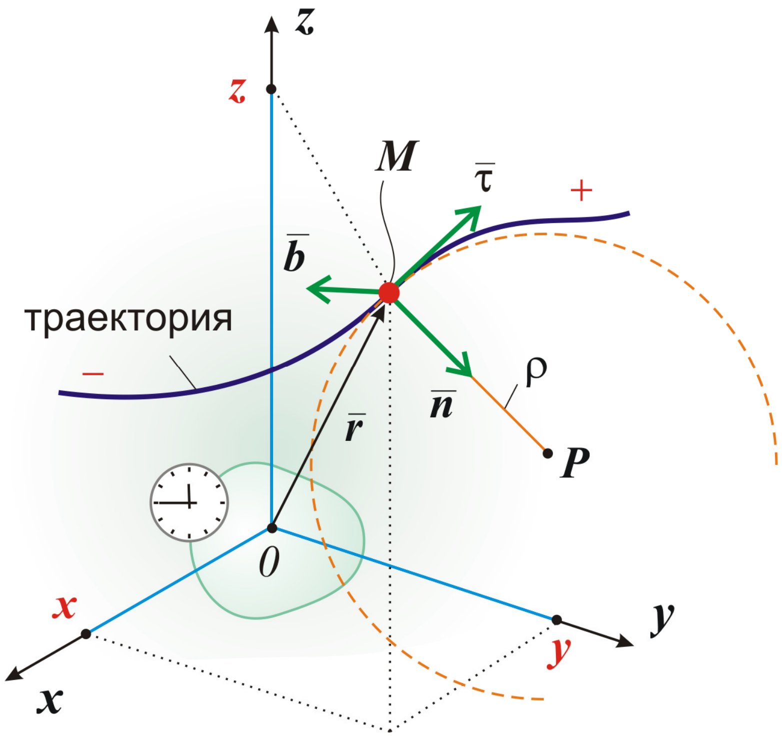
Траектория материальной точки – это непрерывная линия, которую описывает точка M в заданной системе отсчета, двигаясь из начального положения M_0 (начало отсчета, при этом $t=0$)

Дуговая координата $\sigma(t)$ – это отсчитанное по введенному правилу знаков расстояние по дуге траектории от начального положения точки (начало отсчета) до положения точки во время t (отметим, что дуговая координата определяет положение точки относительно начала отсчета)

Задать движение (задать *закон движения*) точки (тела) означает задать положение этой точки (тела) в пространстве в заданной системе отсчета в любой момент времени

Основная задача кинематики – зная закон движения заданного тела (точки), определить все кинематические величины, характеризующие как движение этого тела в целом, так и движение каждой из его точек в отдельности (траектории, скорости, ускорения)

ТРИ СПОСОБА ЗАДАНИЯ ЗАКОНА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ



1) При **векторном способе** закон движения задают как функцию радиус-вектора $\bar{r}$ точки от времени:

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}(t)}$$

Радиус-вектор – это вектор, проведенный из начала координат в заданную точку

2) Согласно **координатному способу**, закон движения задают как зависимость всех координат точки от времени:

$$\boxed{\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}}$$

Отметим, что координаты (x, y, z) заданной точки совпадают с координатами ее радиус-вектора $\bar{r}$

3) При **естественном способе** закон движения точки задают в виде зависимости ее дуговой координаты от времени:

$$\boxed{\sigma = \sigma(t)}$$

Естественные оси – это оси, жестко связанные с данной материальной точкой, которые задают с помощью **ортов естественного трехгранника**: $\bar{n}$, ф и $\bar{b}$, при этом

орт $\bar{n}$ направлен из данной точки к центру кривизны траектории;
орт $\bar{ф}$ направлен по касательной к траектории по направлению движения;
орт $\bar{b}$ ортогонален плоскости, образованной векторами $\bar{n}$ и ф

$$\boxed{|\bar{n}| = |\bar{ф}| = |\bar{b}| = 1, \quad \bar{n} \perp \bar{ф} \perp \bar{b}}$$

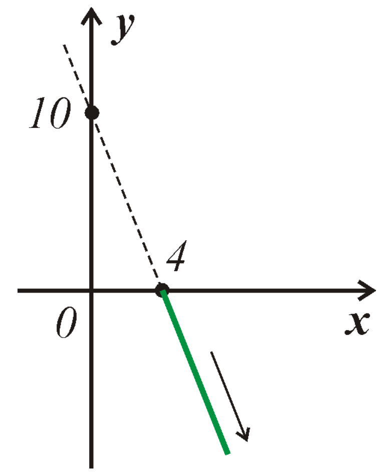
ТРАЕКТОРИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Закон движения, записанный в координатной форме, представляет собой одновременно уравнения траектории точки в параметрической форме

Уравнение траектории в обычной форме можно найти, исключив из уравнений движения время t

Пример 1. Пусть движение точки в плоскости $\{xy\}$ задано уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2t + 4 \\ y = -5t \end{cases}$$



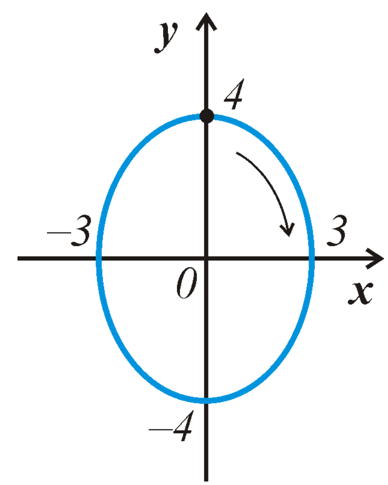
Выразив параметр t из второго уравнения, и, подставив в первое, получим уравнение траектории:

$$y = 10 - 2.5x$$

В начальный момент времени $t = 0$, $x = 4$, $y = 0$. При увеличении t координата x возрастает, а y убывает.

Пример 2. Пусть движение точки в плоскости $\{xy\}$ задано уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3\sin(\pi t) \\ y = 4\cos(\pi t) \end{cases}$$



Разделим первое уравнение на 3, второе на 4, затем возведем оба уравнения в квадрат и сложим. В результате получим уравнение траектории:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$$

В начальный момент времени $t = 0$, $x = 0$, $y = 4$. При увеличении t координата x возрастает, а y убывает.

СКОРОСТЬ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Средняя скорость материальной точки за промежуток времени Δt равна отношению вектора перемещения $\Delta\bar{r}$ точки к соответствующему промежутку времени

$$\bar{V} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$$

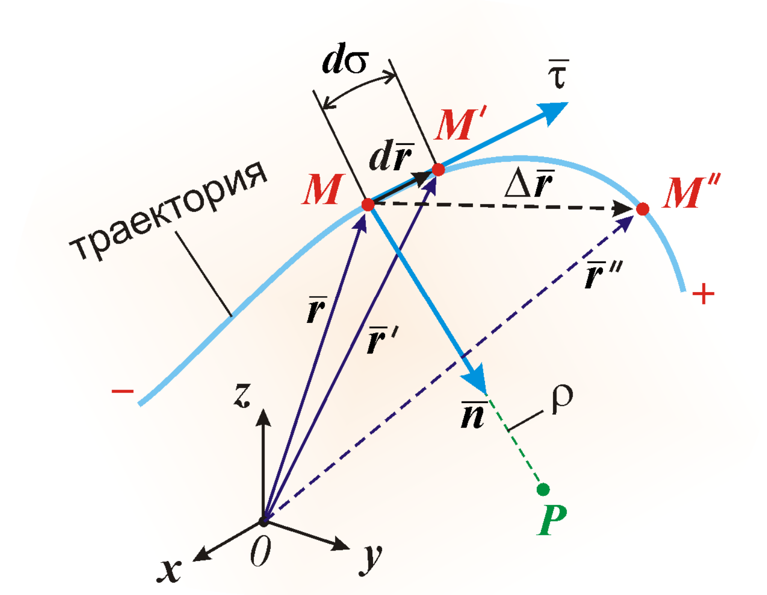
Скорость (мгновенная скорость) материальной точки в данный момент времени равна первой производной от радиус-вектора точки по времени

1. Векторный способ записи:

$$\boxed{\bar{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} \equiv \dot{\bar{r}}}$$

Отметим, что $d\bar{r} = \bar{r}' - \bar{r} \approx d\sigma \cdot \bar{\tau}$, отсюда следует, что вектор скорости направлен по касательной к траектории в сторону движения точки

$$\bar{V} \uparrow\uparrow \bar{\tau}$$



2. Координатный способ записи:

$$\boxed{\begin{cases} V_x = dx/dt \equiv \dot{x} \\ V_y = dy/dt \equiv \dot{y} \\ V_z = dz/dt \equiv \dot{z} \end{cases}}$$

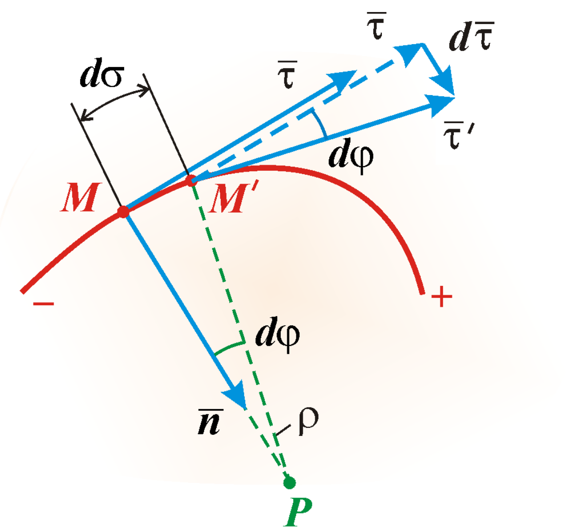
3. Естественный способ записи:

$$\boxed{\bar{V} = \frac{d\sigma}{dt}\bar{\tau} \equiv \dot{\sigma}\,\bar{\tau}}, \qquad \boxed{V = \frac{d\sigma}{dt} \equiv \dot{\sigma}}$$

НЕ ПУТАТЬ центр кривизны траектории (точка P) и начало координат (точка 0), а также радиус-вектор $\bar{r}$ и радиус кривизны траектории ρ

УСКОРЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Ускорение (мгновенное ускорение) материальной точки в данный момент времени равно первой производной от скорости или второй производной от радиус-вектора точки по времени



1. Векторный способ записи:

$$\boxed{\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \equiv \dot{\bar{V}} = \ddot{\bar{r}}}$$

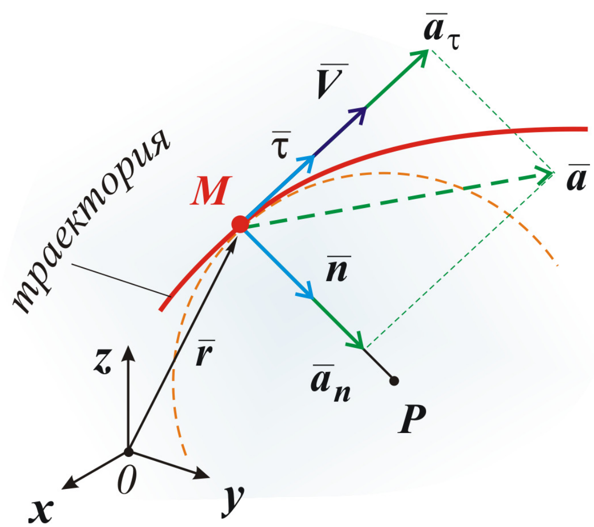
2. Координатный способ:

$$\boxed{\begin{cases} a_x = \dot{V}_x = \ddot{x} \\ a_y = \dot{V}_y = \ddot{y} \\ a_z = \dot{V}_z = \ddot{z} \end{cases}}$$

3. Естественный способ:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d(V\,\bar{\tau})}{dt} = \underbrace{\frac{dV}{dt}\bar{\tau}}_{\bar{a}_\tau} + \underbrace{\frac{d\bar{\tau}}{dt}V}_{\bar{a}_n} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$$

$$d\bar{\tau} \approx |\bar{\tau}| \cdot d\varphi \cdot \bar{n} = 1 \cdot \frac{d\sigma}{\rho} \cdot \bar{n} = \frac{d\sigma}{\rho} \cdot \bar{n} \Rightarrow \bar{a}_n = \frac{d\sigma}{dt}\frac{V}{c}\bar{n} = \frac{V^2}{c}\bar{n}$$



Таким образом, ускорение раскладывают по естественным осям на две составляющие: $\bar{a}_n$ и $\bar{a}_\tau$

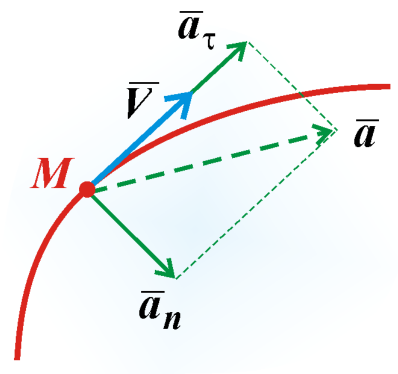
$\bar{a}_n$ — **нормальное** (центростремительное) ускорение

$\bar{a}_\tau$ — **касательное** (тангенциальное) ускорение

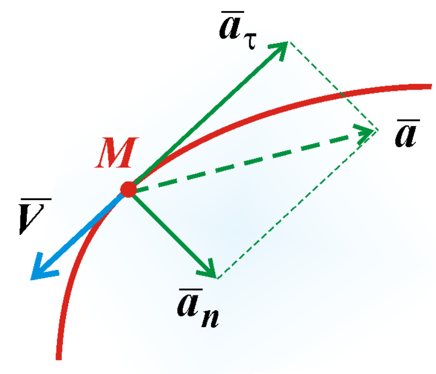
$$\boxed{\bar{a}_\tau = \frac{dV}{dt}\text{ф}} \quad \boxed{\bar{a}_n = \frac{V^2}{c}\bar{n}} \quad \boxed{\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n} \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

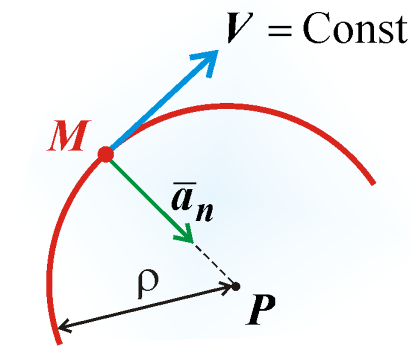
Ускоренное движение:
$\bar{a}_\tau \uparrow\uparrow \bar{V}$



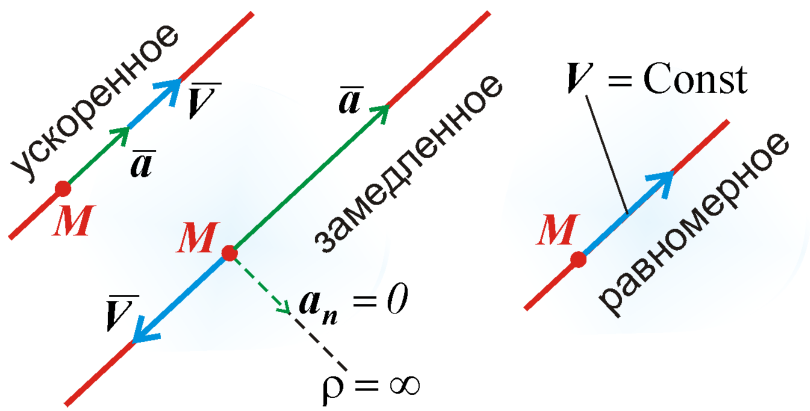
Замедленное движение:
$\bar{a}_\tau \uparrow\downarrow \bar{V}$



Равномерное криволинейное движение: $a_\tau = 0$



Прямолинейное движение: $a_n = 0$



Равнопеременное движение: $a_\tau = \mathrm{Const}$

а) равноускоренное $\bar{V} \uparrow\uparrow \bar{a}_\tau$

б) равнозамедленное $\bar{V} \uparrow\downarrow \bar{a}_\tau$

Зависимость скорости точки от времени при равнопеременном движении:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} \Rightarrow \int dV = \int a_\tau dt \Rightarrow V - V_0 = a_\tau t$$

$$\boxed{V(t) = V_0 + a_\tau t}$$

Здесь V_0 – начальная скорость точки

Зависимость ускорения точки от времени при равнопеременном движении:

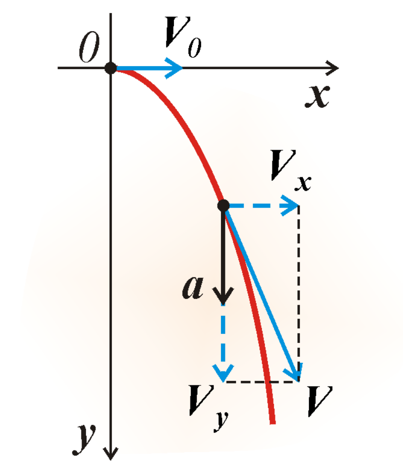
$$V=\frac{d\sigma}{dt} \;\Rightarrow\; \int d\sigma=\int V dt \;\Leftrightarrow\; \int d\sigma=\int (V_0+a_\tau t)dt \;\Rightarrow\; \sigma-\sigma_0=V_0 t+\frac{1}{2}a_\tau t^2$$

$$\boxed{\sigma(t)=\sigma_0+V_0 t+\frac{1}{2}a_\tau t^2}$$

Здесь σ_0 – начальная координата точки

Пример 3 (координатный способ задания движения). При заданном законе движения точки

$$\begin{cases} x=V_0\, t \\ y=\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$



определить ее траекторию, скорость и ускорение (g и V_0 – константы).

Исключив из заданных уравнений параметр t, получим уравнение траектории:

$$y=\frac{g}{2V_0^2}x^2$$

Зависимость скорости от времени: $\begin{cases} V_x=\dot{x}=V_0 \\ V_y=\dot{y}=gt \end{cases}$, $\quad V=\sqrt{V_x^2+V_y^2}=\sqrt{V_0^2+(gt)^2}$

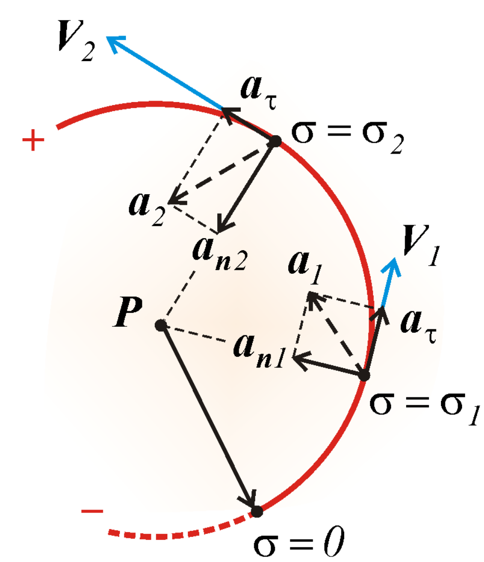
Ускорение: $\begin{cases} a_x=\dot{V}_x=0 \\ a_y=\dot{V}_y=g \end{cases}$, $\quad a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=a_y=g$

Пример 4 (естественный способ задания движения). Точка начинает двигаться из состояния покоя равноускоренно по окружности радиуса r и, пройдя путь σ_1, приобретает скорость V_1. Найти скорость V_2 и ускорение a_2 точки в момент, когда пройденный путь равен σ_2.

Так как точка начинает двигаться из состояния покоя, то

$$\sigma=\underbrace{\sigma_0}_{=0}+\underbrace{V_0}_{=0}t+\frac{a_\tau t^2}{2}=\frac{a_\tau t^2}{2}, \qquad V=\underbrace{V_0}_{=0}+a_\tau t=a_\tau t$$

Исключив из этих выражений из t, получим, что $a_\tau=\dfrac{V^2}{2\sigma}$.



Равноускоренное движение означает постоянство a_τ на всем пути, то есть:

$$a_\tau=\frac{V_1^2}{2\sigma_1}=\frac{V_2^2}{2\sigma_2}\Rightarrow V_2=V_1\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}$$

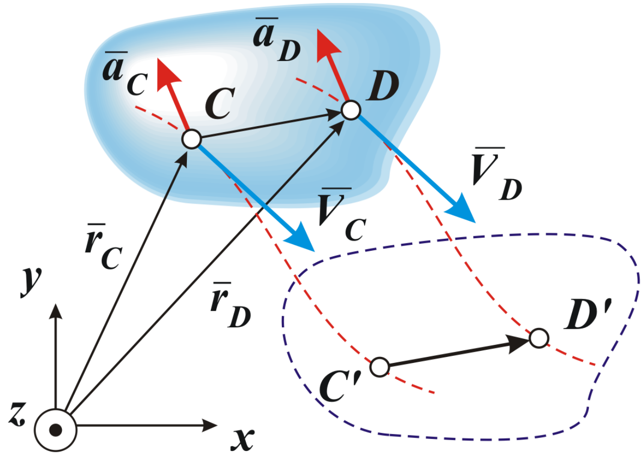
Нормальное ускорение при $\sigma=\sigma_2$: $a_{n2}=\dfrac{V_2^2}{r}$

Полное ускорение при $\sigma=\sigma_2$:

$$a_2=\sqrt{a_{n2}^2+a_\tau^2}=V_2^2\sqrt{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{4\sigma_2^2}}=V_1^2\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sqrt{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{4\sigma_2^2}}$$

Заметим, что центростремительные ускорения a_{n1} и a_{n2} отличаются друг от друга, что обусловлено различием соответствующих скоростей V_1 и V_2. Отсюда следует, что также различны полные ускорения a_1 и a_2.

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА



Поступательным называется движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная через две его точки, передвигается параллельно самой себе

$$\bar{r}_D = \bar{r}_C + \overline{CD}$$

Вектор $\overline{CD}$ с течением времени не меняется по величине (по определению твердого тела) и направлению (остается параллельным самому себе)

$$\frac{d\bar{r}_D}{dt} = \frac{d\bar{r}_C}{dt} + \underbrace{\frac{d}{dt}\overline{CD}}_{0} \quad \Rightarrow \quad \bar{V}_D = \bar{V}_C \quad \Rightarrow \quad \bar{a}_D = \bar{a}_C$$

Скорости (а также ускорения и траектории) всех точек твердого тела, движущегося поступательно, равны друг другу

ЗАКОН ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ определяется законом движения любой его точки:

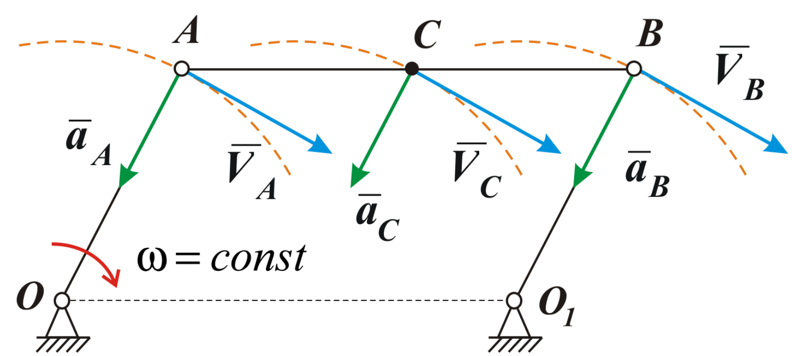
$\boxed{\bar{r}_C = \bar{r}_C(t)}$ (или $\bar{r}_D = \bar{r}_D(t)$)

Пример поступательного движения

Звено AB движется поступательно, так как во время движения звено AB постоянно остается параллельным самому себе (а также $//OO_1$), следовательно,

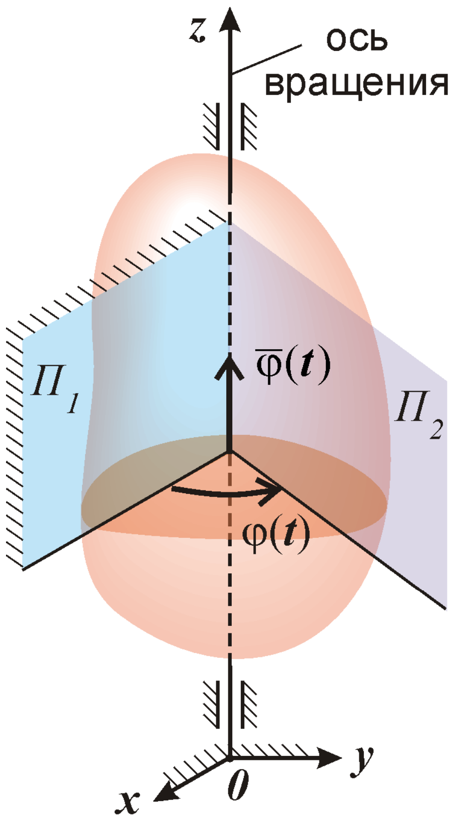
$$\bar{V}_A = \bar{V}_B = \bar{V}_C \equiv \bar{V};$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_B = \bar{a}_C \equiv \bar{a}.$$



Траектории точек звена AB представляют собой окружности, радиусы которых равны длинам отрезков OA и O_1B

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА



Вращательным движением твердого тела называется такое движение, при котором две точки этого тела во все время движения остаются неподвижными

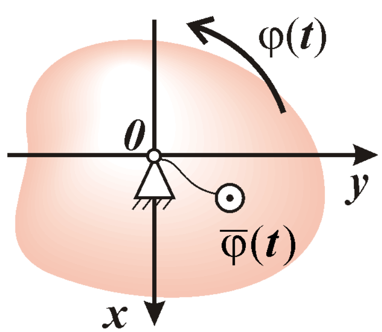
Ось вращения – это прямая, снабженная правилом знаков, точки которой неподвижны в заданной системе отсчета

Угол поворота – это угол между пересекающимися на оси вращения плоскостями, закрепленными соответственно в неподвижной системе отсчета Π_1 и в самом вращающемся теле Π_2

Правило знаков для угла поворота:
увеличение угла поворота с положительного направления оси вращения видится происходящим против часовой стрелки

ЗАКОН ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА:

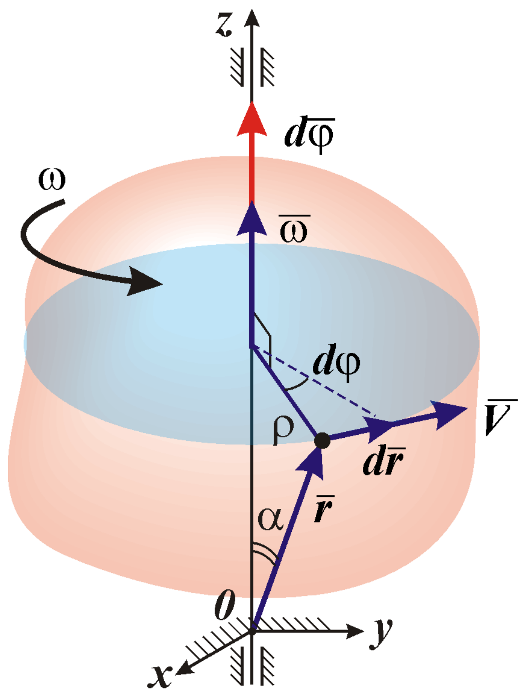
$$\boxed{\varphi = \varphi(t)}$$



Вектор угла поворота $\overline{\varphi}(t)$ по модулю равен величине угла поворота $\varphi(t)$, а направлен, согласно правилу знаков, вдоль оси вращения z

Единицы измерения угла поворота – [рад]

Основные кинематические характеристики вращающего тела:
угловая скорость ω и угловое ускорение ε



Угловая скорость вращающегося твердого тела в данный момент времени равна первой производной от угла поворота по времени:

$$\boxed{\overline{\omega} = \frac{d\overline{\varphi}}{dt}} \qquad \boxed{\omega \equiv \overline{\omega}_z = \frac{d\varphi}{dt}}$$

Правило знаков для угловой скорости:

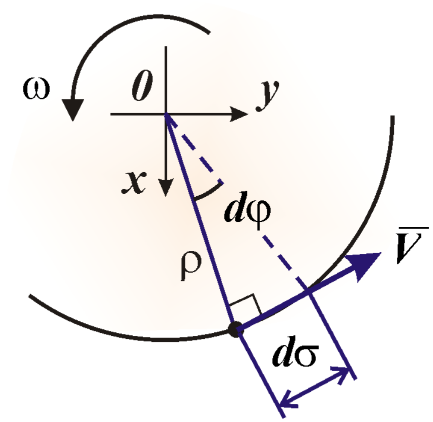
если $\omega > 0$, то с положительного направления оси z вращение тела видится происходящим против часовой стрелки

если $\omega < 0$ – по часовой стрелке

Единицы измерения угловой скорости: $[\omega] = [1/\text{с}]$

Линейная скорость точки вращающегося тела равна произведению угловой скорости вращения этого тела ω на радиус вращения ρ (кратчайшее расстояние от точки до оси z) и направлена ортогонально этому радиусу в сторону вращения:

$$\boxed{\begin{cases} V = \omega\,\rho \\ \overline{V} \perp \rho \ \ (\text{в сторону } \omega) \end{cases}}$$

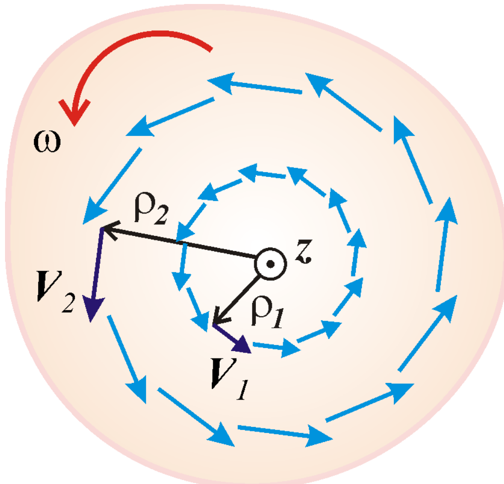


Докажем первое из этих выражений:

$$V = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d(\varphi\cdot\rho)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\cdot\rho = \omega\cdot\rho$$

Полное доказательство: с учетом равенства $d\overline{r} = d\overline{\varphi}\times\overline{r}$ получим, что

$$\overline{V} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{d\overline{\varphi}}{dt}\times\overline{r} = \overline{\omega}\times\overline{r} \ \Rightarrow \ \begin{cases} V = \omega\cdot\underbrace{r\sin\alpha}_{\rho} = \omega\rho \\ \overline{V} \perp \overline{\omega} \end{cases}$$



Скорости точек, равноудаленных от оси вращения, по модулю равны

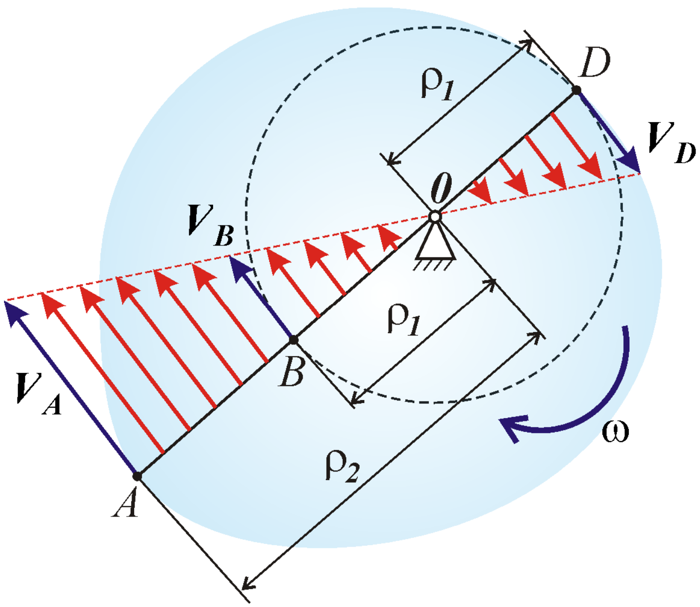
Например, скорости точек, удаленных от оси z на расстояние ρ_1 равны

$$V_1 = \omega\rho_1,$$

а скорости точек, удаленных от оси z на расстояние ρ_2 равны

$$V_2 = \omega\rho_2$$

Отметим, что угловая скорость ω – это характеристика твердого тела, а не его отдельных точек



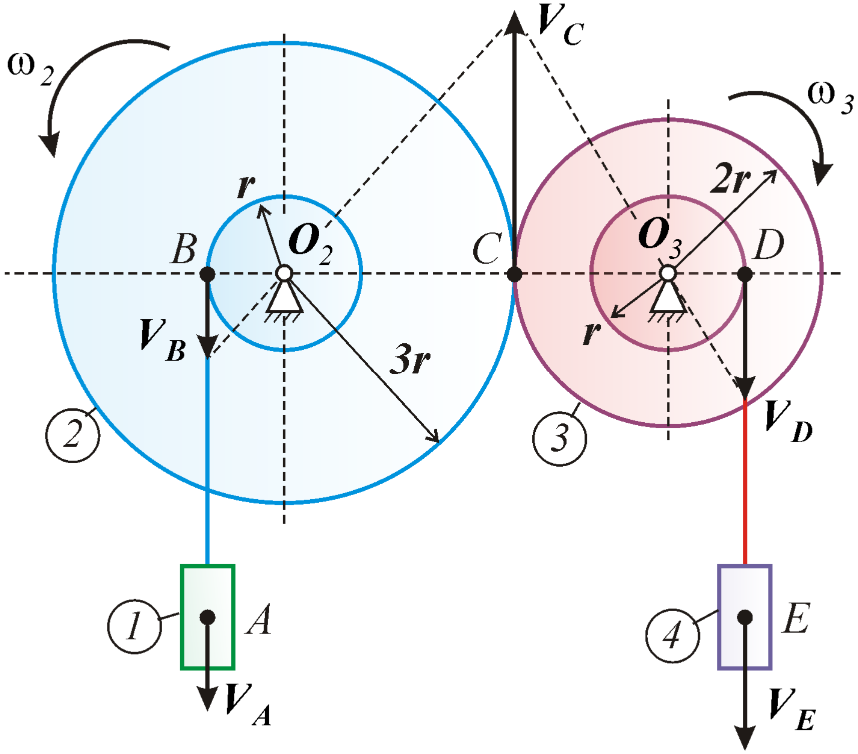
Скорости точек, расположенных на прямой, пересекающей ось вращения, линейно распределены вдоль этой прямой

На оси вращения скорости точек равны нулю: $V_0 = 0$

$$V_B = V_D = \omega\rho_1, \qquad \bar{V}_B = -\bar{V}_D$$

$$\omega = \frac{V_B}{\rho_1} = \frac{V_A}{\rho_2} \Rightarrow V_A = V_B\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Например, если $\rho_2 = 2\rho_1$, то $V_A = 2V_B$



Пример 5. Для заданного механизма определить соотношение между скоростями точек A и E, если тросы нерастяжимы, а механизм движется без проскальзывания.

1. Виды движений тел механической системы:

   Тела №1 и №4 движутся <u>поступательно</u>

   Тело №2 <u>вращается</u> вокруг центра O_2

   Тело №3 <u>вращается</u> вокруг центра O_3

2. Выразим скорость точки B через скорость точки A: так как трос нерастяжим (скорости всех его точек равны друг другу по величине) и проскальзывание в точке B отсутствует (скорости троса и диска в точке B совпадают), $V_B = V_A$

3. Угловая скорость тела №2: $\omega_2 = \dfrac{V_B}{O_2B} = \dfrac{V_A}{r}$

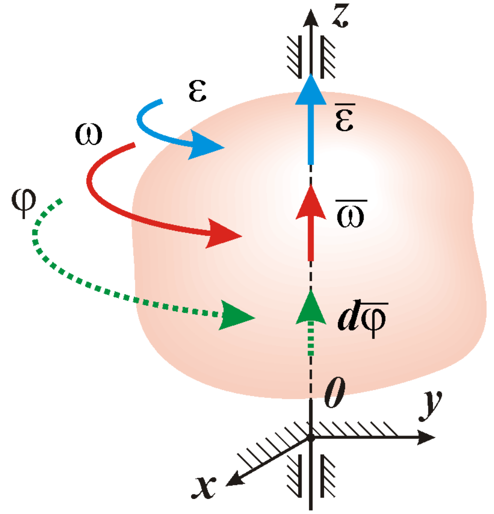
4. Скорость точки C тела №2: $V_C = \omega_2 \cdot O_2C = \dfrac{V_A}{r} \cdot 3r = 3V_A$ (так как проскальзывание между дисками отсутствует, скорости точек C обоих дисков совпадают)

5. Угловая скорость тела №3: $\omega_3 = \dfrac{V_C}{O_3C} = \dfrac{3V_A}{2r}$

6. Скорость точки D: $V_D = \omega_3 \cdot O_3D = \dfrac{3V_A}{2r} \cdot r = \dfrac{3}{2} V_A$

7. Скорость точки E: $V_E = V_D = \dfrac{3}{2} V_A$ (см. пункт 2)

ускоренное движение



<u>Угловое ускорение твердого тела</u> в данный момент времени равно первой производной от угловой скорости вращения или второй производной угла поворота тела по времени:

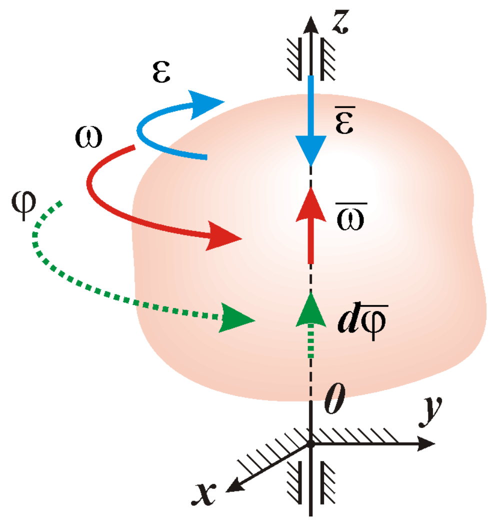
$$\boxed{\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d^2\bar{\varphi}}{dt^2}} \qquad \boxed{\varepsilon = \bar{\varepsilon}_z = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}} \qquad [\varepsilon] = \left[\frac{1}{c^2}\right]$$

<u>Некоторые частные случаи вращательного движения:</u>

1. Ускоренное движение: $\bar{\varepsilon} \uparrow\uparrow \bar{\omega}$
2. Замедленное движение: $\bar{\varepsilon} \uparrow\downarrow \bar{\omega}$
3. Равномерное движение: $\varepsilon = 0$ (то есть $\bar{\omega} = \mathrm{Const}$)
4. Равнопеременное движение: $\bar{\varepsilon} = \mathrm{Const}$

   а) равноускоренное: $\bar{\varepsilon} \uparrow\uparrow \bar{\omega}$ б) равнозамедленное: $\bar{\varepsilon} \uparrow\downarrow \bar{\omega}$

замедленное движение



Зависимость угловой скорости тела от времени при равнопеременном движении:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \int d\omega = \int \varepsilon dt \Rightarrow \omega - \omega_0 = \varepsilon t \Rightarrow \boxed{\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t}$$

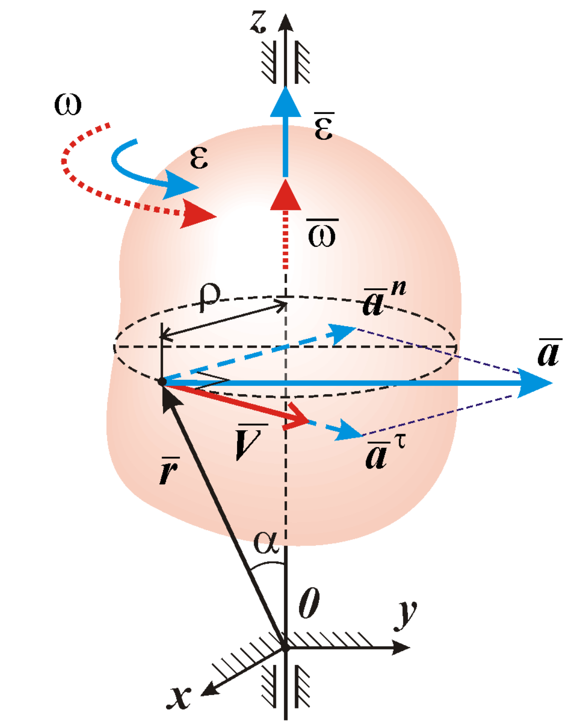
Здесь ω_0 – начальная угловая скорость тела

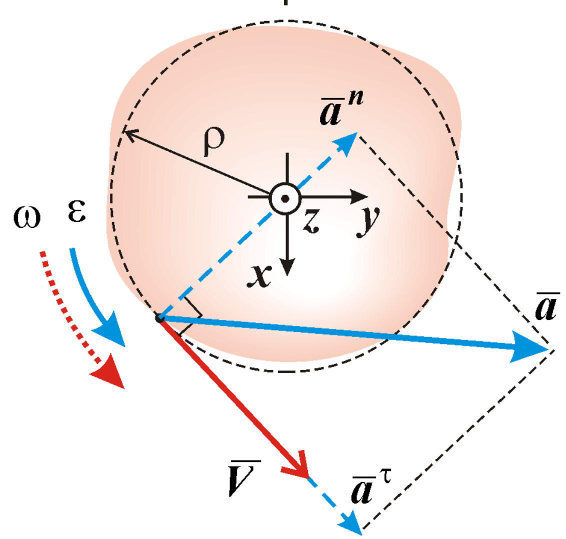
Зависимость углового ускорения тела от времени при равнопеременном движении:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \int d\varphi = \int \omega dt \Leftrightarrow \int d\varphi = \int (\omega_0 + \varepsilon t) dt \Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$$

$$\boxed{\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2}$$

Здесь φ_0 – начальный угол поворота тела





Линейное ускорение точки вращающегося тела

Линейное ускорение точки вращающегося тела раскладывают по естественным осям на две составляющие:

Нормальное (центростремительное) ускорение $\bar{a}^{\,n}$

и **касательное (тангенциальное)** $\bar{a}^{\,\tau}$

$$\boxed{\bar{a} = \bar{a}^{\,n} + \bar{a}^{\,\tau}}$$

$$\boxed{\begin{cases} a^n = \omega^2 \rho = \dfrac{V^2}{\rho} \\ a^\tau = \varepsilon\, \rho \end{cases}}$$

Покажем это:

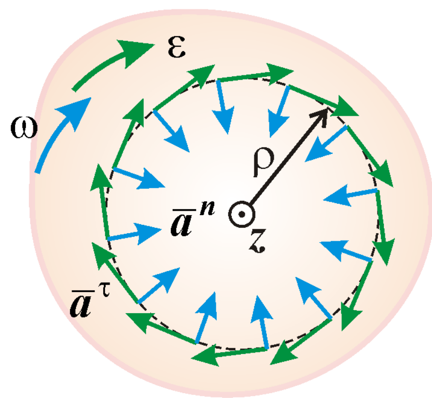
$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \underbrace{\bar{\varepsilon} \times \bar{r}}_{\bar{a}^{\,\tau}} + \underbrace{\bar{\omega} \times \bar{V}}_{\bar{a}^{\,n}}$$

Тангенциальное ускорение точки вращающегося тела направлено перпендикулярно радиусу вращения ρ и равно:

$$\bar{a}^{\,\tau} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}, \quad a^\tau = \varepsilon \cdot \underbrace{r \cdot \sin\alpha}_{\rho} = \varepsilon\rho$$

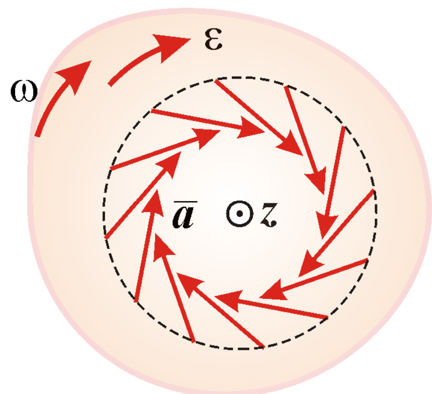
Центростремительное ускорение точки вращающегося тела направлено к оси (для плоских задач – к центру) вращения и равно:

$$\bar{a}^{\,n} = \bar{\omega} \times \bar{V}, \quad a^n = \omega \cdot V \cdot \sin\frac{\pi}{2} = \omega \cdot \underbrace{V}_{\omega \cdot \rho} = \omega^2 \rho \quad (\text{или} \;\; a^n = \frac{V^2}{\rho})$$



Ускорения точек тела, равноудаленных от оси вращения, равны по модулю и направлены под одинаковыми углами к соответствующим радиусам вращения:

$$\begin{cases} a^n = \omega^2 \rho \\ a^\tau = \varepsilon\,\rho \end{cases} \Rightarrow\ a = \sqrt{(a^n)^2 + (a^\tau)^2} = \rho\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

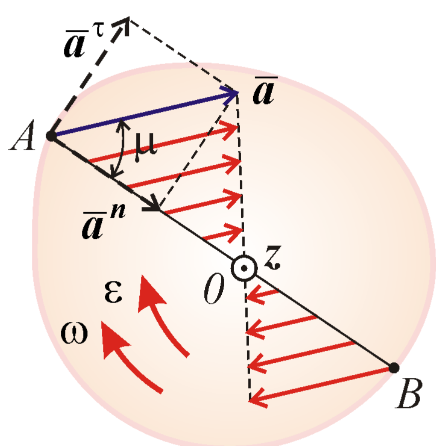


Ускорения всех точек вращающегося тела пропорциональны их расстояниям до оси вращения

$$\begin{cases} a_A^\tau = \varepsilon \cdot ПA \\ a_B^\tau = \varepsilon \cdot ПB \end{cases} \Rightarrow\ a_A^\tau = a_B^\tau \cdot \frac{ПA}{OB}$$

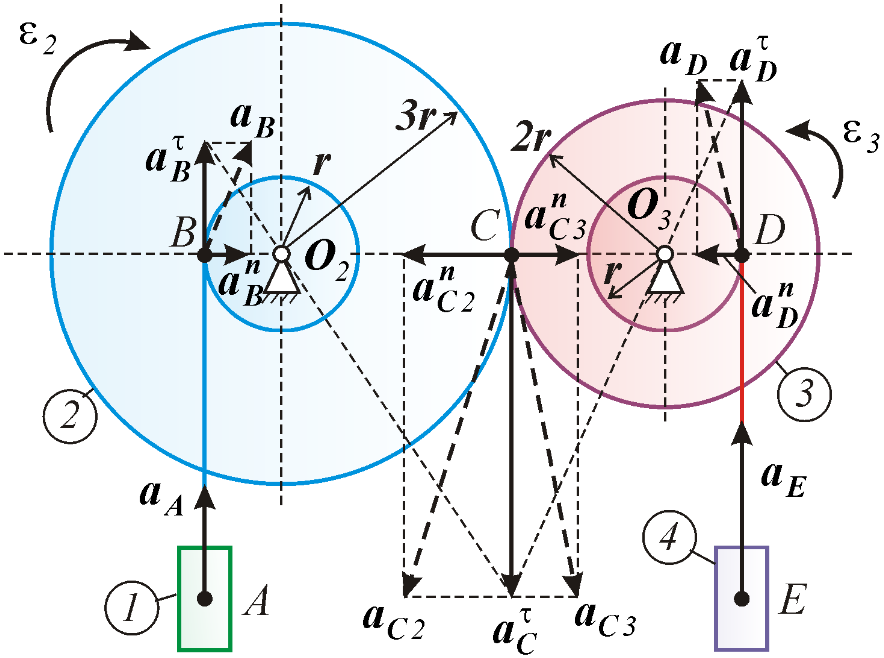
$$\begin{cases} a_A^n = \omega^2 \cdot OA \\ a_B^n = \omega^2 \cdot OB \end{cases} \Rightarrow\ a_A^n = a_B^n \cdot \frac{ПA}{OB}$$

$$\begin{cases} a_A = OA\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \\ a_B = OB\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \end{cases} \Rightarrow\ a_A = a_B \cdot \frac{ПA}{OB}$$



и образуют в данный момент времени один и тот же угол μ с радиусами, описываемых ими окружностей

$$\mathrm{tg}\,\mu = \frac{a^\tau}{a^n} = \frac{\varepsilon\rho}{\omega^2\rho} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}\ \Rightarrow\ \mu = \mathrm{arctg}\left(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right)$$



Пример 6. Для механизма, заданного в примере №5, найти a_E, если известно a_A.

Выразим ускорение точки B через ускорение точки A (трос нерастяжим $\Rightarrow$ касательные ускорения всех его точек равны друг другу по величине, проскальзывание в точке B отсутствует $\Rightarrow$ a_B^τ троса и диска в точке B совпадают),

$$a_B^\tau = a_A, \quad a_B^n = \frac{V_B^2}{O_2B} = \frac{V_A^2}{r},$$

$$a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^\tau)^2}$$

2. Угловое ускорение тела №2: $\varepsilon_2 = \dfrac{a_B^\tau}{O_2B} = \dfrac{a_A}{r}$

3. Ускорение точки C: $a_{C2}^\tau = a_{C3}^\tau \equiv a_C^\tau$, $a_C^\tau = \varepsilon_2 \cdot O_2C = \dfrac{a_A}{r} \cdot 3r = 3a_A$

$$a_{C2}^n = \frac{V_C^2}{O_2C} = 3\frac{V_A^2}{r}, \quad a_{C2} = \sqrt{(a_{C2}^n)^2 + (a_C^\tau)^2}, \quad a_{C3}^n = \frac{V_C^2}{O_3C} = \frac{9V_A^2}{2r}, \quad a_{C3} = \sqrt{(a_{C3}^n)^2 + (a_C^\tau)^2}$$

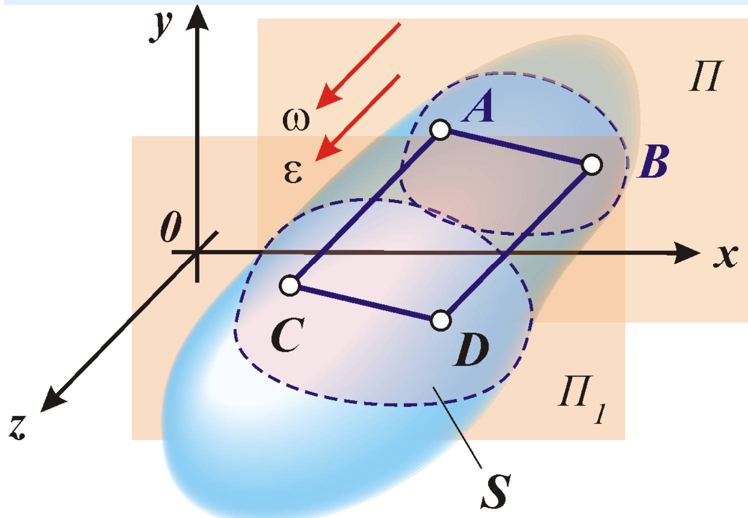
4. Угловое ускорение тела №3: $\varepsilon_3 = \dfrac{a_C^\tau}{O_3C} = \dfrac{3a_A}{2r}$

5. Ускорение точки D: $a_D^\tau = \varepsilon_3 \cdot O_3D = \dfrac{3}{2}a_A$, $\quad a_D^n = \dfrac{V_D^2}{O_3D} = \dfrac{9V_A^2}{4r}$, $\quad a_D = \sqrt{(a_D^n)^2 + (a_D^\tau)^2}$

6. Ускорение точки E: $a_E = a_D^\tau = \dfrac{3}{2}a_A$ (см. пункт 1)

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Движение твердого тела называется **плоским**, если все его точки перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой заданной неподвижной плоскости (например, плоскости $\{z,\ y\}$)

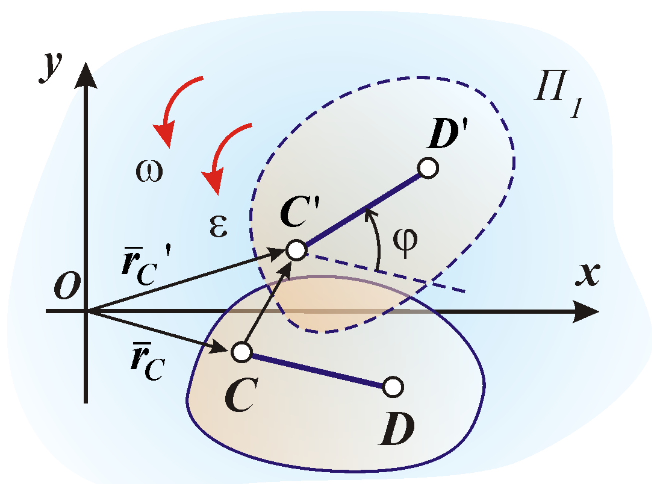


движение изображающего сечения

Прямые, перпендикулярные этой плоскости (например, AC и BD), передвигаются параллельно самим себе, поэтому плоское движение твердого тела определяется движением любого сечения (например S), параллельного этой неподвижной плоскости (изображающее сечение)

Закон плоского движения тела:

$$\begin{cases} x_C = x_C(t) \\ y_C = y_C(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}$$



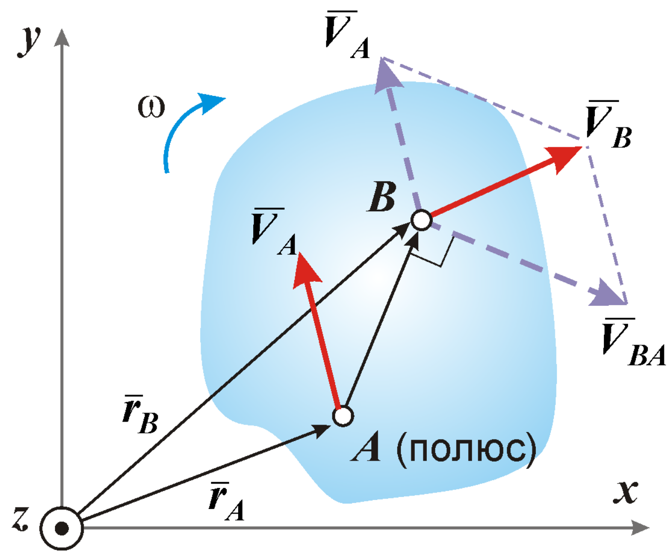
Угловая скорость тела при плоском движении:

$$\bar{\omega} = \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \qquad \omega = \bar{\omega}_z = \frac{d\varphi}{dt}$$

Угловое ускорение тела при плоском движении:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \qquad \varepsilon = \bar{\varepsilon}_z = \frac{d\omega}{dt}$$

ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ СКОРОСТЕЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА



Плоское движение твердого тела можно представить, как сумму поступательного движения этого тела со скоростью полюса (произвольно выбранной точки тела) и вращательного движения вокруг выбранного полюса

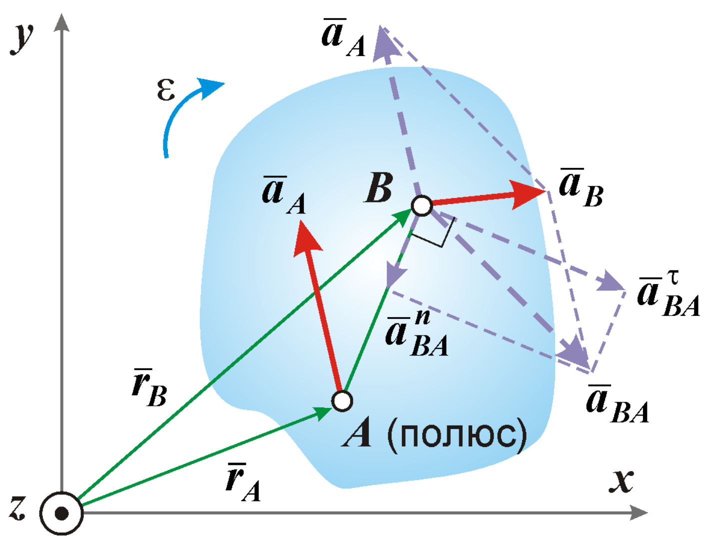
$$\boxed{\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}} \qquad \boxed{\begin{cases} \overline{V}_A & \text{– скорость полюса} \\ V_{BA} = \omega \cdot AB, & \overline{V}_{BA} \perp AB \end{cases}}$$

Доказательство: продифференцировав по времени равенство $\overline{r}_B = \overline{r}_A + \overline{AB}$, получим:

$$\frac{d\overline{r}_B}{dt} = \frac{d\overline{r}_A}{dt} + \frac{d}{dt}\overline{AB} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}$$

Здесь $\overline{V}_{BA} = \overline{AB} \times \overline{\omega}$ – скорость точки B во вращательном движении тела вокруг полюса A

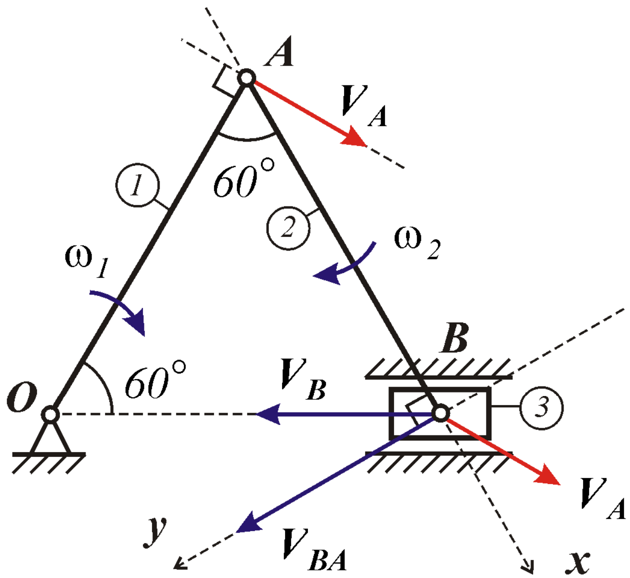
ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ УСКОРЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА



$$\boxed{\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA} = \overline{a}_A + \overline{a}^{n}_{BA} + \overline{a}^{\tau}_{BA}}$$

$$\boxed{\begin{cases} \overline{a}_A & \text{– ускорение полюса} \\ \overline{a}^{n}_{BA} \uparrow\downarrow \overline{AB}, & a^{n}_{BA} = \omega^2 AB \\ \overline{a}^{\tau}_{BA} \perp AB, & a^{\tau}_{BA} = \varepsilon \cdot AB \end{cases}}$$

Пример 7. Определить скорость точки B и угловую скорость второго звена кривошипно-шатунного механизма, если известна скорость вращения первого звена ω_1 и его длина $OA = r$



1. Вид движения звеньев механизма:
   звено №1 – вращательное движение;
   звено №2 – плоское движение;
   звено №3 – поступательное движение.
2. Точка A $\in$ звену №1, следовательно:

$$V_A = \omega_1 \cdot OA = r\,\omega_1, \qquad \bar{V}_A \perp OA$$

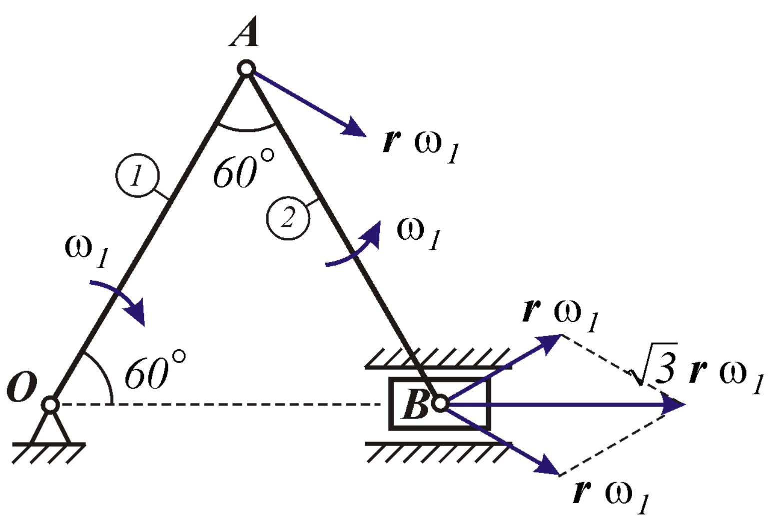
3. Точка B $\in$ звену №3 $\Rightarrow$ $\bar{V}_B \parallel OB$
4. Точка B $\in$ звену №2 $\Rightarrow$ используем теорему о сложении скоростей:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}\text{ , где } \bar{V}_{BA} \perp AB$$

Спроецируем это равенство на оси координат:

$$\begin{cases} x: -V_B \cos 60^\circ = V_A \cos 30^\circ \\ y: V_B \cos 30^\circ = -V_A \cos 60^\circ + V_{BA} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_B = -\sqrt{3}\,V_A = -\sqrt{3}\,r\,\omega_1 \\ V_{BA} = -V_A = -r\,\omega_1 \end{cases}$$

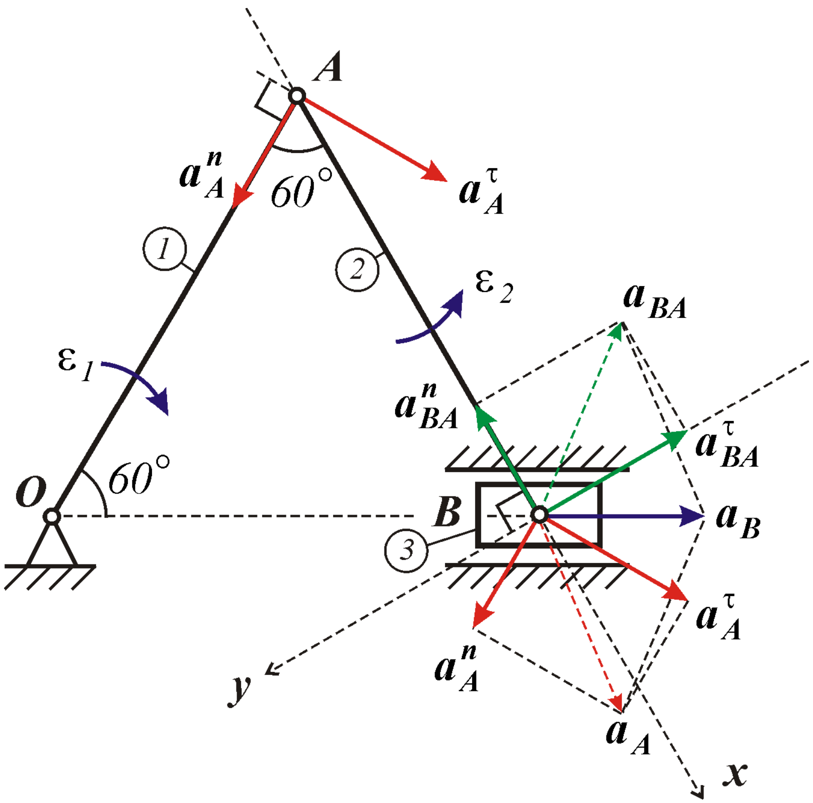


4. Скорость вращения 2го звена:

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{AB} = \frac{-r\,\omega_1}{r} = -\omega_1$$

Знаки «минус» полученных величин означают, что соответствующие векторы следует направить в противоположную сторону

Пример 8. Определить ускорение точки $\boldsymbol{B}$ и угловое ускорение второго звена кривошипно-шатунного механизма из примера 7, если известно угловое ускорение первого звена $\varepsilon_1 = \sqrt{3}\omega_1^2$



1. Точка $\boldsymbol{A} \in$ звену №1, следовательно:

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 r, \quad a_A^n = \omega_1^2 r$$

2. Точка $\boldsymbol{B} \in$ звену №3 $\Rightarrow \bar{a}_B \parallel OB$

3. Теорема о сложении ускорений:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau$$

$$a_A^n = \frac{V_A^2}{r} = \omega_1^2 r, \quad a_A^\tau = \varepsilon_1 r = \sqrt{3}\omega_1^2 r, \quad a_{BA}^n = r\omega_2^2 = r\omega_1^2$$

Спроецируем это равенство на оси координат:

$$\begin{cases} x: a_B \cos 60^\circ = a_A^n \cos 60^\circ + a_A^\tau \cos 30^\circ - a_{BA}^n \\ y: -a_B \cos 30^\circ = a_A^n \cos 30^\circ - a_A^\tau \cos 60^\circ - a_{BA}^\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a_B}{2} = \dfrac{\omega_1^2 r}{2} + \dfrac{3}{2}\omega_1^2 r - \omega_1^2 r \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} a_B = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\omega_1^2 r - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\omega_1^2 r - a_{BA}^\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_B = \omega_1^2 r + 3\omega_1^2 r - 2\omega_1^2 r \\ -\sqrt{3} a_B = \sqrt{3}\omega_1^2 r - \sqrt{3}\omega_1^2 r - 2a_{BA}^\tau \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_B = \omega_1^2 r + 3\omega_1^2 r - 2\omega_1^2 r = 2\omega_1^2 r \\ 2a_{BA}^\tau = \sqrt{3}\omega_1^2 r - \sqrt{3}\omega_1^2 r + \sqrt{3} a_B = \sqrt{3} a_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_B = 2\omega_1^2 r \\ a_{BA}^\tau = \sqrt{3}\omega_1^2 r \end{cases}$$

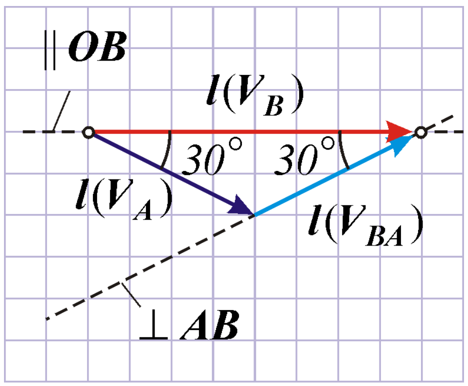
$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{r} = \frac{\sqrt{3}\,\omega_1^2 r}{r} = \sqrt{3}\,\omega_1^2$$

ПЛАНЫ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ

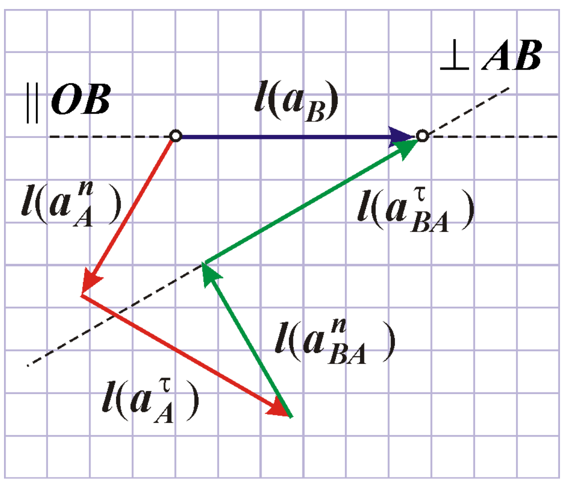
План скоростей – графическая интерпретация теоремы о сложении скоростей: $\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}$

План ускорений – графическая интерпретация теоремы о сложении ускорений: $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}$

$$\underline{\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}}$$



$$\underline{\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau}$$



Пример 9. Для механизма из примера 7 построить план скоростей и план ускорений

<u>План скоростей</u>

1) выбираем масштаб: $\mu = \dfrac{V_A[\text{м/с}]}{l_{VA}[\text{м}]}$

2) из произвольной точки проводим вектор $\bar{V}_A$ длиной

$$l(V_A) = V_A[\text{м/с}]/\mu$$

3) из конца этого вектора проводим линию, параллельную $\bar{V}_{BA}$, а из начала – линию, параллельную $\bar{V}_B$; точка пересечения этих линий определяет длины соответствующих векторов

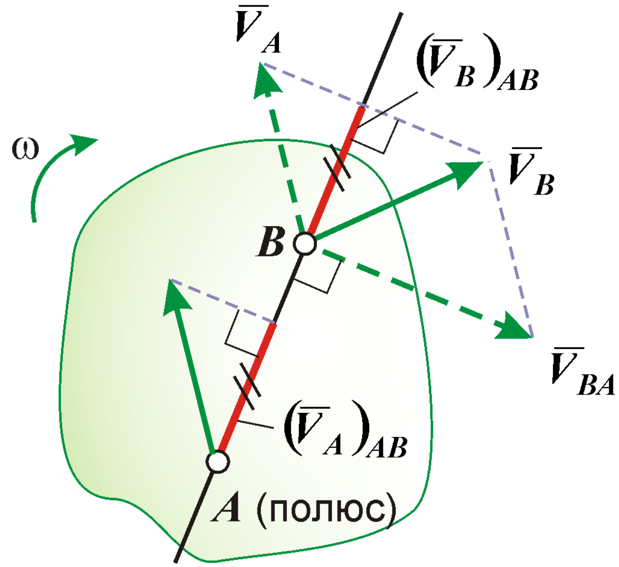
4) умножаем полученные длины на коэффициент μ:

$$V_B[\text{м/с}] = l(V_B)\cdot\mu \ , \quad V_{BA}[\text{м/с}] = l(V_{BA})\cdot\mu$$

<u>План ускорений</u>

1) выбираем масштаб; 2) из произвольной точки последовательно откладываем векторы $l(a_A^n)$, $l(a_A^\tau)$ и $l(a_{BA}^n)$; 3) из начальной точки проводим линию, параллельную $\bar{a}_B$; из конечной точки – линию, параллельную $\bar{a}_{BA}^\tau$; точка пересечения линий определяет длины соответствующих векторов; 4) умножаем полученные длины на коэффициент μ

ТЕОРЕМА О ПРОЕКЦИЯХ СКОРОСТЕЙ ДВУХ ТОЧЕК ТВЕРДОГО ТЕЛА

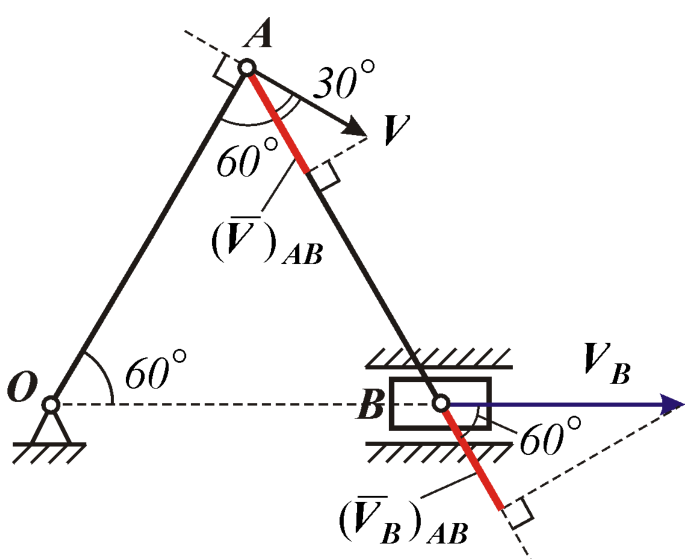


Спроецируем выражение $\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}$ на линию, проходящую через точки A и B:

$$(\overline{V}_B)_{AB} = (\overline{V}_A)_{AB} + \underbrace{(\overline{V}_{BA})_{AB}}_{=0}$$

Отсюда следует, что *проекции скоростей двух точек твердого тела на линию, их соединяющую, равны между собой* (с учетом знака проекций!):

$$\boxed{(\overline{V}_B)_{AB} = (\overline{V}_A)_{AB}}$$



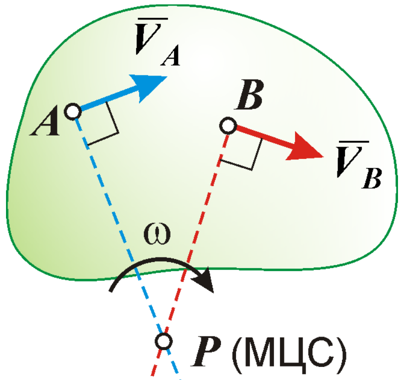
Пример 10. Определить скорость точки B кривошипно-шатунного механизма из примера 7, если известно, скорость точки A равна V

1. Точка $A \in$ звену №1 $\Rightarrow \overline{V} \perp OA$
2. Точка $B \in$ звену №3 $\Rightarrow \overline{V}_B \parallel OB$
3. Для вычисления величины скорости точки B воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела:

$$(\overline{V}_B)_{AB} = (\overline{V})_{AB}$$

$$V_B \cos 60^\circ = V \cos 30^\circ \;\Rightarrow\; V_B = V\frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = \sqrt{3}V$$

МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР СКОРОСТЕЙ (МЦС)



На пересечении перпендикуляров к скоростям точек тела, движущегося плоско, существует **мгновенный центр скоростей** – точка изображающего сечения, скорость которой в данный момент времени равна нулю

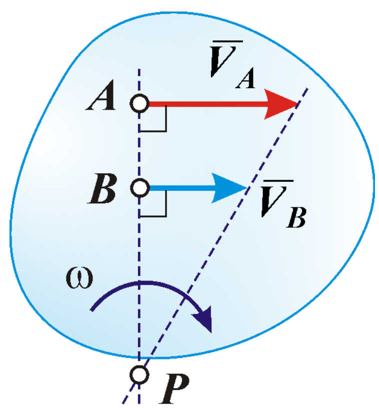
По теореме о проекциях скоростей двух точек твердого тела:

$$\left.\begin{array}{l}(\overline{V}_A)_{AP} = (\overline{V}_P)_{AP} \\ (\overline{V}_B)_{BP} = (\overline{V}_P)_{BP}\end{array}\right\} \Rightarrow (\overline{V}_P)_{AP} = (\overline{V}_P)_{BP} = 0 \Rightarrow \overline{V}_P = 0$$

МЦС – точка, вокруг которой тело вращается в данный момент времени, поэтому при решении задач плоское движение тела удобно рассматривать как мгновенно-вращательное вокруг МЦС

НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЦС

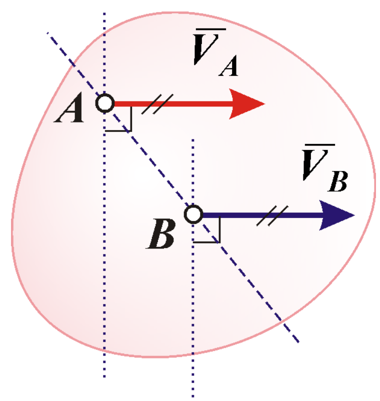
1. МЦС – точка P



Мгновенно-вращательное движение

$$\omega = \frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{PB}$$

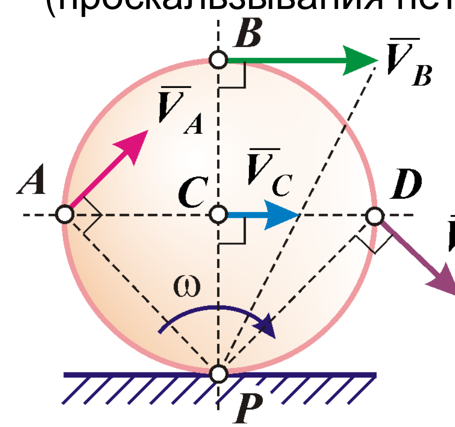
2. МЦС отсутствует



Мгновенно-поступательное движение

$$\omega = 0$$

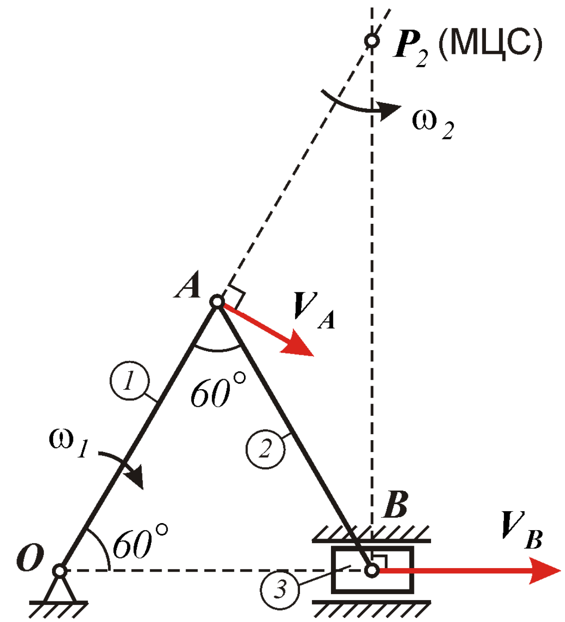
3. МЦС – точка P (проскальзывания нет)



Мгновенно-вращательное движение

$$\omega = \frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{PB} = \frac{V_C}{PC} = \frac{V_D}{PD}$$

Пример 11. Определить скорость точки B и угловую скорость второго звена кривошипно-шатунного механизма из примера 7.



Расчет геометрических параметров:

$$OP_2 = OB/\cos 60^\circ = 2OB = 2r$$

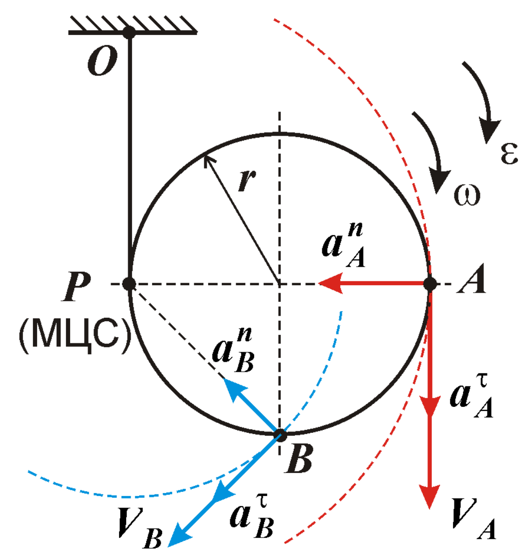
$$BP_2 = OP_2 \cos 30^\circ = 2r\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}r$$

$$AP_2 = OP_2 - OA = 2r - r = r$$

Расчет кинематических характеристик:

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = \frac{r\,\omega_1}{r} = \omega_1, \qquad V_B = \omega_2\, BP_2 = \omega_1\sqrt{3}r$$

Пример 12. Определить скорости, касательные и нормальные ускорения точек A и B разматывающейся катушки, если известна ее угловая скорость ω, угловое ускорение ε и радиус r. Проскальзывание между тросом и катушкой отсутствует. Трос нерастяжим.



Так как трос нерастяжим, все его точки на линии OP неподвижны, в том числе точка P. Проскальзывание между катушкой и тросом отсутствует, следовательно, скорости точки P троса и точки P катушки совпадают: $V_P = 0$. Значит точка P – МЦС катушки.

$$V_A = \omega \cdot AP = 2\omega r, \quad a_A^\tau = \varepsilon \cdot AP = 2\varepsilon r, \quad a_A^n = \omega^2 \cdot AP = 2\omega^2 r$$

$$V_B = \omega \cdot BP = \sqrt{2}\omega r, \quad a_B^\tau = \varepsilon \cdot BP = \sqrt{2}\varepsilon r, \quad a_B^n = \omega^2 \cdot BP = \sqrt{2}\omega^2 r$$

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Сложное движение материальной точки – это движения точки по отношению к двум системам отсчета, из которых одна считается условно неподвижной, а вторая определенным образом движется по отношению к первой

1. Движение, совершаемое точкой по отношению к подвижной системе отсчета, называют **относительным движением**

Траектория, описываемая точкой в относительном движении, называется **относительной траекторией**, скорость точки по отношению к подвижной системе отсчета называют **относительной скоростью** $\bar{V}^r$, а ускорение – **относительным ускорением** $\bar{a}^r$

2. Движение, совершаемое подвижной системой отсчета и всеми неизменно связанными с ней точками пространства по отношению к неподвижной системе отсчета, называют **переносным движением**

Траектория, описываемая точкой в переносном движении, называется **переносной траекторией**, скорость той неизменно связанной с подвижным пространством точки, с которой в данный момент времени совпадает рассматриваемая точка, называют **переносной скоростью** $\bar{V}^e$, а ускорение – **переносным ускорением** $\bar{a}^e$

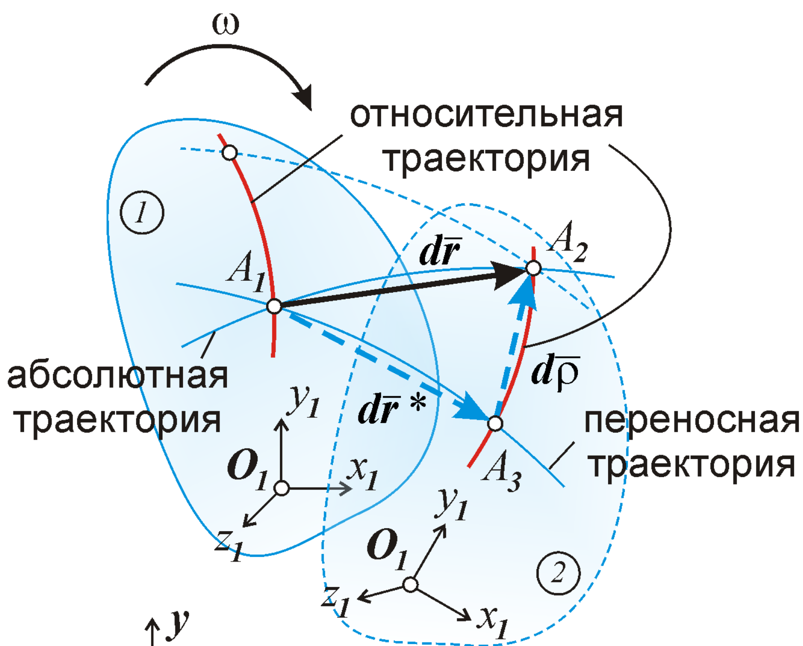
3. Движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системе отсчета, называют **абсолютным движением** (**сложное движение точки**)

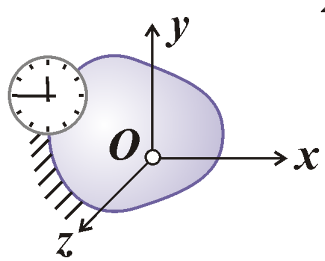
Траектория, описываемая точкой в абсолютном движении, называется **абсолютной траекторией**, скорость точки по отношению к неподвижной системе отсчета называют **абсолютной скоростью** $\bar{V}^a$, а ускорение – **абсолютным ускорением** $\bar{a}^a$

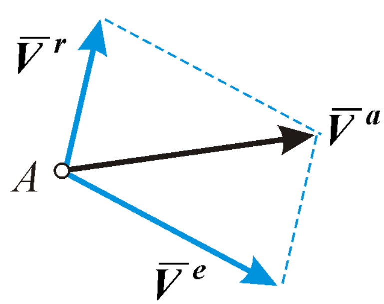
ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ СКОРОСТЕЙ ТОЧКИ ПРИ ЕЕ СЛОЖНОМ ДВИЖЕНИИ

Абсолютная скорость точки при ее сложном движении складывается из переносной скорости этой точки и ее относительной скорости:

$$\boxed{\bar{V}^a = \bar{V}^e + \bar{V}^r} \qquad \boxed{V^a = \sqrt{(V^e)^2 + (V^r)^2}}$$







Доказательство: рассмотрим движение точки A как сложное по отношению к неподвижному пространству $Oxyz$ и подвижному – $O_1x_1y_1z_1$. Подвижное пространство за время dt перемещается из положения 1 в положение 2. Точка подвижного пространства, совмещенная в данный момент времени с точкой A, перемещается при этом по переносной траектории из положения A_1 в положение A_3. Одновременно точка A перемещается по относительной траектории в положение A_2. Таким образом, абсолютное перемещение $A_1 \to A_2$ можно представить как сумму переносного и относительного:

$$d\bar{r} = d\bar{r}\,* + d\bar{\rho}$$

Разделим это выражение почленно на dt:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}\,*}{dt} + \frac{d\bar{\rho}}{dt}$$

Здесь

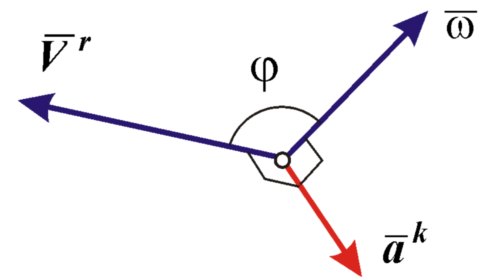
$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{V}^a, \qquad \frac{d\bar{r}\,*}{dt} = \bar{V}^e, \qquad \frac{d\bar{\rho}}{dt} = \bar{V}^r$$

ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ УСКОРЕНИЙ ТОЧКИ ПРИ ЕЕ СЛОЖНОМ ДВИЖЕНИИ (ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА)

Абсолютное ускорение $\bar{a}^a$ точки при ее сложном движении складывается из переносного ускорения $\bar{a}^e$ этой точки, ее относительного ускорения $\bar{a}^r$ и ускорения Кориолиса $\bar{a}^k$

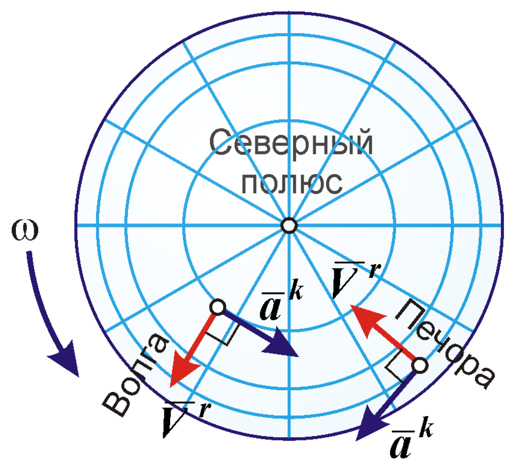
$$\boxed{\bar{a}^a = \bar{a}^e + \bar{a}^r + \bar{a}^k} \qquad \boxed{a^a = \sqrt{(a^e)^2 + (a^r)^2 + (a^k)^2}}$$

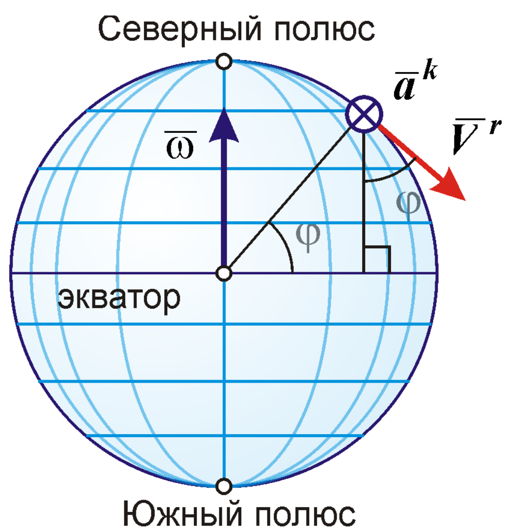
Кориолисово ускорение точки равно удвоенному произведению угловой скорости переносного движения ω на относительную скорость точки



$$\boxed{\bar{a}^k = 2\,\bar{\omega} \times \bar{V}^r} \qquad \boxed{a^k = 2\,V^r \omega \sin\varphi}$$

Пример 13. Определить направление ускорения Кориолиса воды в реках Волге и Печоре





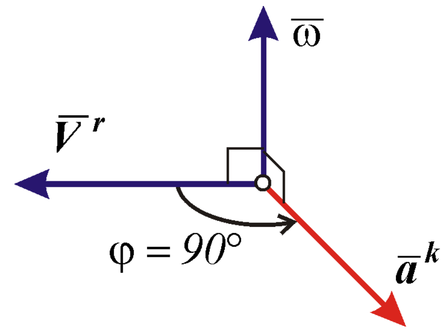
Ускорение Кориолиса в северном полушарии направлено от правого по течению берега реки к левому. За счет сил инерции правый берег подмывается и становится более крутым по сравнению с левым

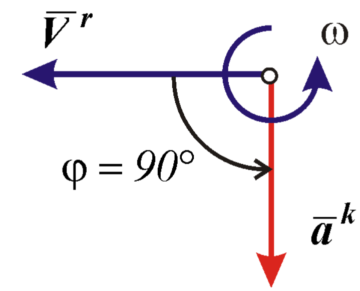
$$a^k = 2\,V^r \omega \cdot \sin\varphi$$

Здесь φ – широта местоположения

Если угловая скорость подвижного пространства $\overline{\omega}$ и относительная скорость $\overline{V}^r$ точки перпендикулярны друг другу, то угол между этими векторами составляет $\varphi = 90°$ и его синус равен единице. В этом случае кориолисово ускорение равно

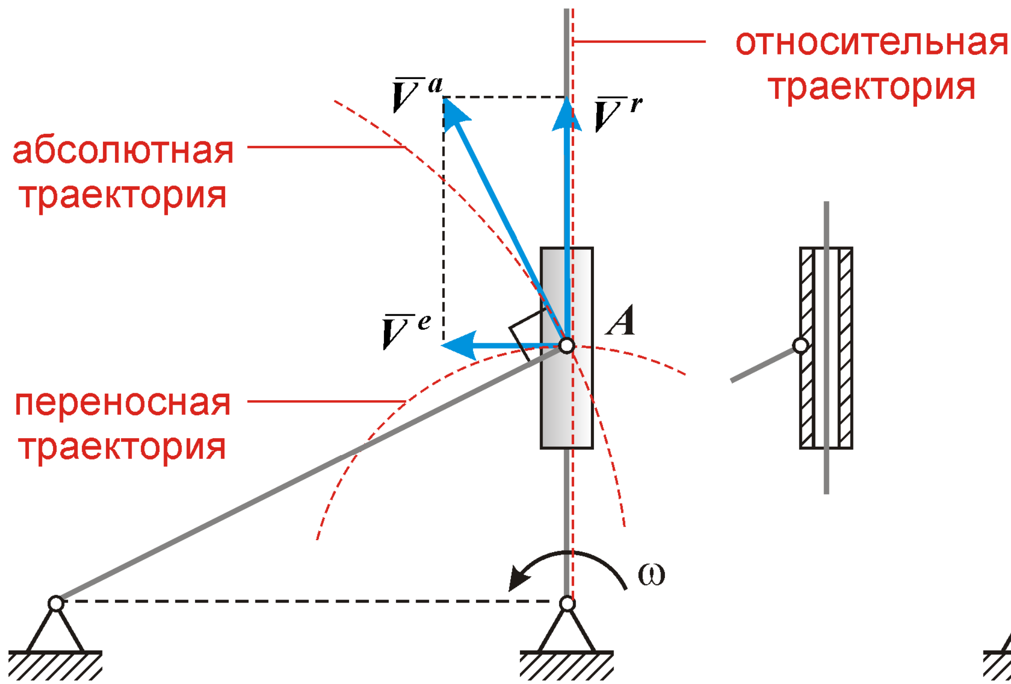
$$\boxed{a^k = 2V^r\omega}$$

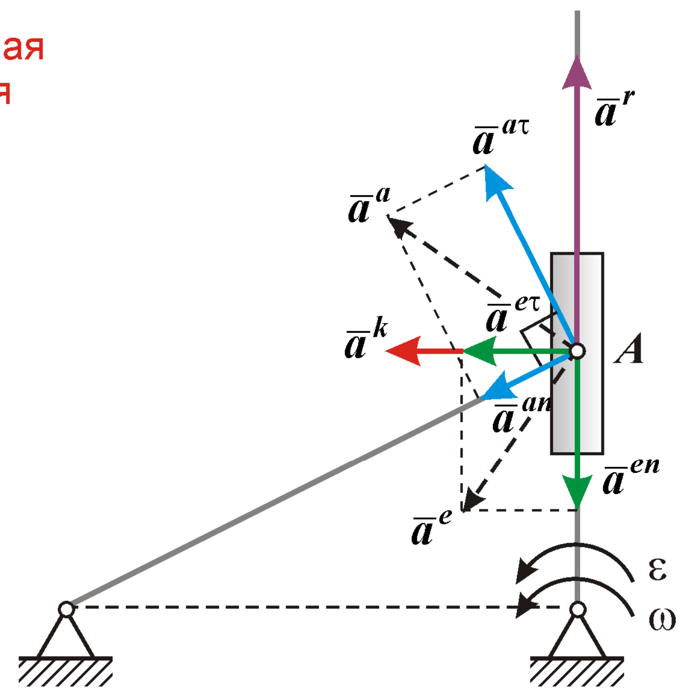




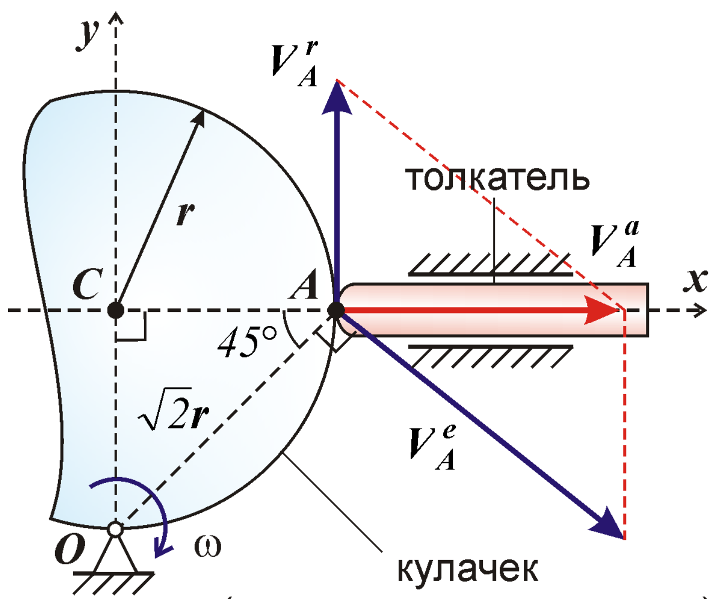
Ускорение Кориолиса направлено в ту сторону, которую укажет вектор относительной скорости, если его повернуть на $90°$ по направлению вращения подвижного пространства

Пример 14. Указать направления векторов скоростей и ускорений точки A механизма, изображенного на рисунке, при ее абсолютном, относительном и переносном движении





Пример 15. Найти скорость и ускорение толкателя кулачкового механизма, если известен радиус кулачка $OC = r$ и его угловая скорость щ – const



Представим движение точки A, как сложное. Свяжем подвижное пространство с кулачком (профиль кулачка – окружность с центром в точке C)

$$\bar{V}_A^a = \bar{V}_A^e + \bar{V}_A^r \quad (*)$$

$\bar{V}_A^a \parallel CA$ (величина неизвестна)

$\bar{V}_A^r \perp CA$ (величина неизвестна)

$\bar{V}_A^e \perp OA$ по направлению ω

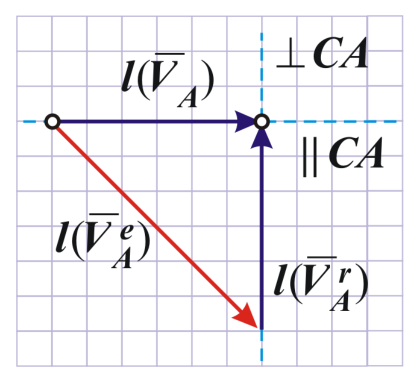
$V_A^e = \omega\, OA = \sqrt{2}\omega r$

Спроецируем выражение (*) на координатные оси:

$$\begin{cases} x: \; V_A^a = V_A^e \cos 45^\circ \\ y: \; V_A^r = V_A^e \sin 45^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A = V_A^a = \sqrt{2}\omega r \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \omega r \\ V_A^r = \sqrt{2}\omega r \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \omega r \end{cases}$$

ПЛАН СКОРОСТЕЙ

$$\bar{V}_A = \bar{V}_A^e + \bar{V}_A^r \qquad \text{м} = \frac{V_A^e[\text{м/с}]}{l(\bar{V}_A^e)[\text{м}]}$$



$$\bar{a}_A^a = (\bar{a}_A^{en} + \bar{a}_A^{e\tau}) + (\bar{a}_A^{rn} + \bar{a}_A^{r\tau}) + \bar{a}_A^k \qquad (**)$$

$\bar{a}_A^a \parallel CA$ (величина неизвестна)

$\bar{a}_A^{en} \uparrow\downarrow OA, \qquad a_A^{en} = \omega^2\, OA = \sqrt{2}\omega^2 r$

$a_A^{e\phi} = \varepsilon\, OA = 0$ (так как ω – const)

$\bar{a}_A^{rn} \uparrow\downarrow CA, \qquad a_A^{rn} = (V_A^r)^2 / CA = \omega^2 r^2 / r = \omega^2 r$

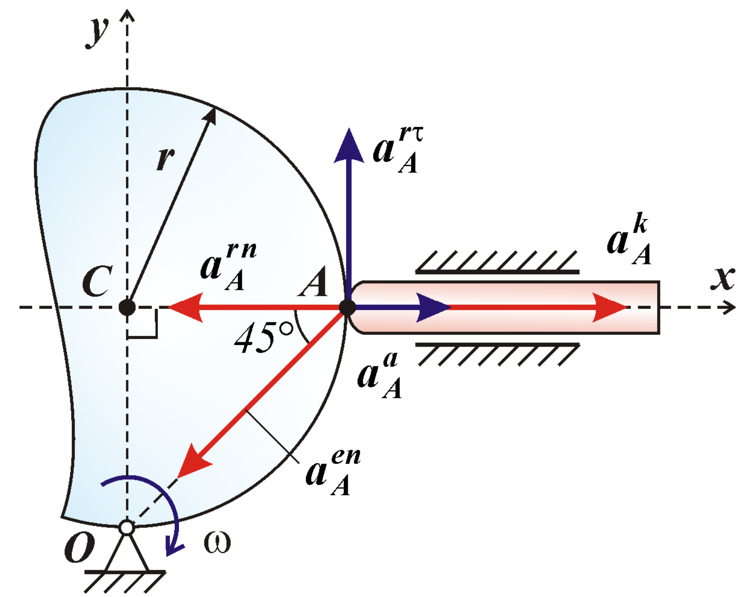
$\bar{a}_A^{r\tau} \perp CA$ (величина неизвестна)

$\bar{a}_A^k \uparrow\uparrow CA \quad a_A^k = 2\omega V_A^r = 2\omega^2 r$

Спроецируем выражение (**) на ось x:

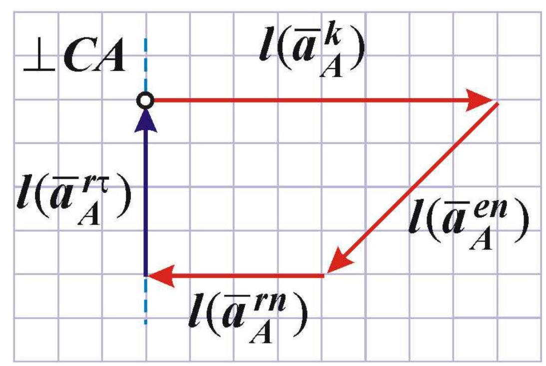
$$a_A^a = -a_A^{en} \cos 45^\circ - a_A^{rn} + a_A^k$$

$$a_A^a = -\sqrt{2}\omega^2 r \cos 45^\circ - \omega^2 r + 2\omega^2 r = 0$$



ПЛАН УСКОРЕНИЙ

$$\bar{0} = \bar{a}_A^k + \bar{a}_A^{en} + \bar{a}_A^{rn} + \bar{a}_A^{r\tau}$$



$$\mu = \frac{a_A^k\,[\text{м/с}^2]}{l(\bar{a}_A^k)\,[\text{м}]}$$