ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ДИНАМИКА

Динамика – это раздел теоретической механики, в котором изучаются законы движения материальных тел под действием сил

Материальную точку, на которую не наложено никаких связей, называют **свободной**

Несвободная материальная точка, благодаря наложенным на нее связям, движется по заданной неподвижной поверхности или кривой; всякую несвободную материальную точку будем рассматривать как свободную, отбросив связь и заменив ее реакцией

ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ (ЗАКОНЫ НЬЮТОНА)

1. **Закон инерции**: изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние

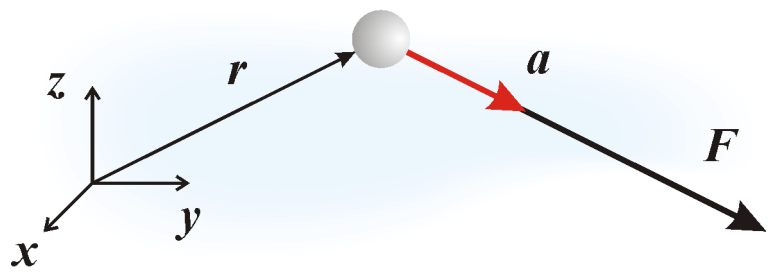
2. **Основной закон динамики**: произведение массы материальной точки на ускорение, которое она получает под действием силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с этой силой:

$$\boxed{m\bar{a} = \bar{F}}$$

Здесь сила $\bar{F}$ – равнодействующая всех сил $\bar{F}_i$, приложенных к телу:

$$\bar{F} = \Sigma \bar{F}_i$$

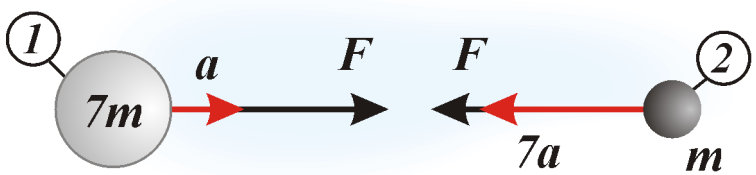
Материальная точка



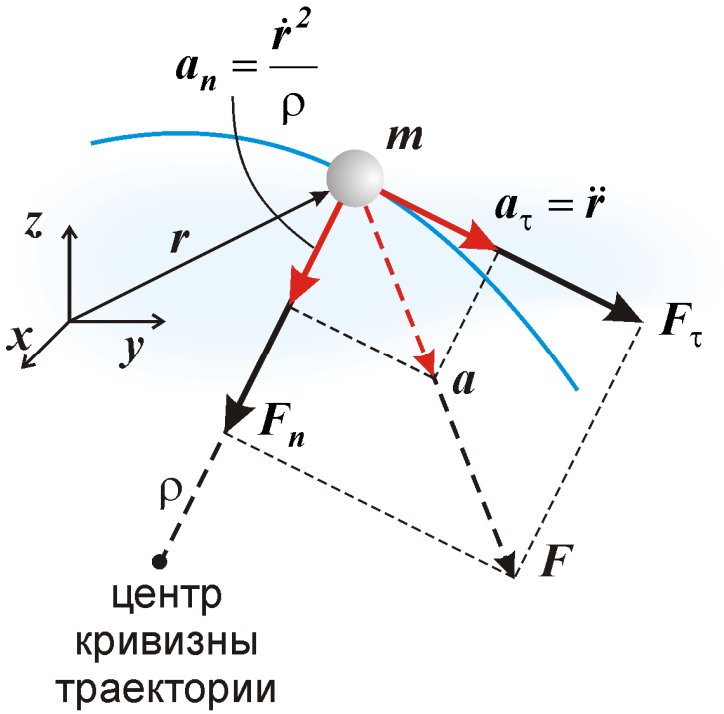
3. **Закон действия и противодействия**: две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны:

$$\boxed{\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}} \quad \boxed{F_{12} = F_{21} \equiv F}$$

Магнит Кусок железа



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ



Вспомним несколько формул из кинематики:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

$$\bar{a} = \dot{\bar{V}} = \ddot{\bar{r}}, \quad a_\tau = \dot{V} = \ddot{r}, \quad a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\dot{r}^2}{\rho}$$

1. Векторный способ записи	2. Координатный способ записи	3. Естественный способ записи
$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}$	$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{m\dot{r}^2}{\rho} = F_n \\ m\ddot{r} = F_\tau \end{cases}$

ДВЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

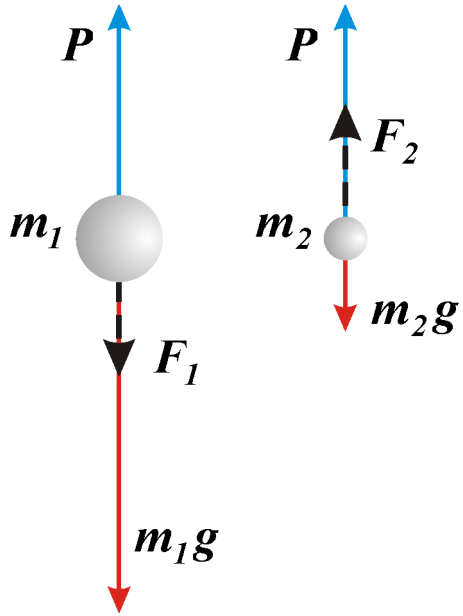
1. **Первая задача динамики**: зная закон движения материальной точки и ее массу, определить действующую на нее силу

Эту задачу решают с помощью основного закона динамики; при этом, если ускорение не задано непосредственно, то его предварительно вычисляют по формулам кинематики

2. **Вторая или основная задача динамики**: зная массу точки и действующие на нее силы, определить закон ее движения

Эту задачу решают с помощью общих теорем динамики или путем двойного интегрирования закона движения (в этом случае необходимо использовать начальные условия)

Пример 1 (первая задача динамики). Материальная точка массой m_1 опускается вниз с ускорением a под действием силы тяжести и некоторой подъемной силы P. Какой должна быть масса m_2 точки, чтобы она поднималась вверх с таким же ускорением?



Когда материальная точка опускается вниз, то на нее действует сила:

$$F_1 = m_1 a = m_1 g - P$$

Когда точка поднимается вверх, то на нее действует сила:

$$F_2 = m_2 a = P - m_2 g$$

Исключив из этих двух уравнений неизвестную величину P, получим:

$$m_2 = m_1 \frac{g-a}{g+a}$$

Пример 2 (вторая задача динамики). Материальная точка массой m начинает прямолинейное движение вдоль оси x из состояния покоя под действием силы $F(t) = kt$. Найти закон движения точки.

С учетом основного закона динамики запишем: $F = ma \equiv m\dot{V} \equiv m\ddot{x} = kt$

Проинтегрируем это выражение дважды:

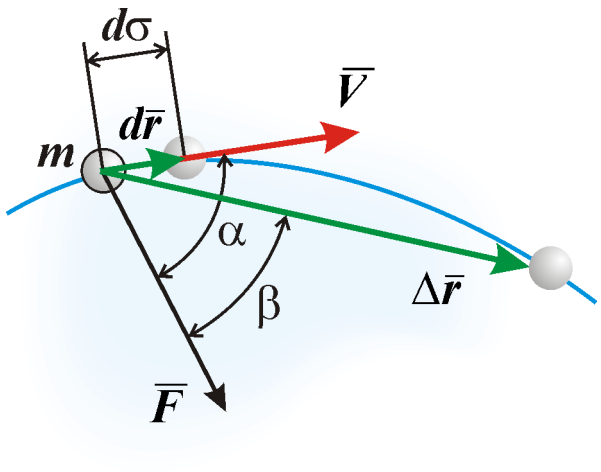
$$\int m\ddot{x}dt = \int ktdt \Rightarrow m\dot{x} = \frac{1}{2}kt^2 + c_1$$

$$\int m\dot{x}dt = \frac{1}{2}k\int t^2 dt + \int c_1 dt \Rightarrow mx = \frac{1}{6}kt^3 + c_1 t + c_2$$

Учтем начальные условия: $V(t=0) \equiv \dot{x}(t=0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$; $x(t=0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

В результате получили закон движения точки: $x = \frac{k}{6m}t^3$

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ



Кинетической энергией материальной точки называют скалярную величину, равную половине произведения массы точки на квадрат ее скорости:

$$\boxed{T = \frac{mv^2}{2}}$$

Кинетической энергией механической системы, состоящей из материальных точек количеством n, называют сумму:

$$T = \Sigma T_i = \frac{1}{2}\Sigma m_i V_i^2, \qquad i = 1...n$$

РАБОТА СИЛЫ. МОЩНОСТЬ

Элементарной работой силы называют скалярное произведение силы на вектор элементарного перемещения точки:

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r} \;\Rightarrow\; dA = F\, d\sigma \cos\alpha$$

Работа силы на любом конечном перемещении равна интегралу от элементарной работы, взятому вдоль этого перемещения:

$$A = \int \bar{F} \cdot d\bar{r} \;\Rightarrow\; A = \int F \cos\alpha \; d\sigma$$

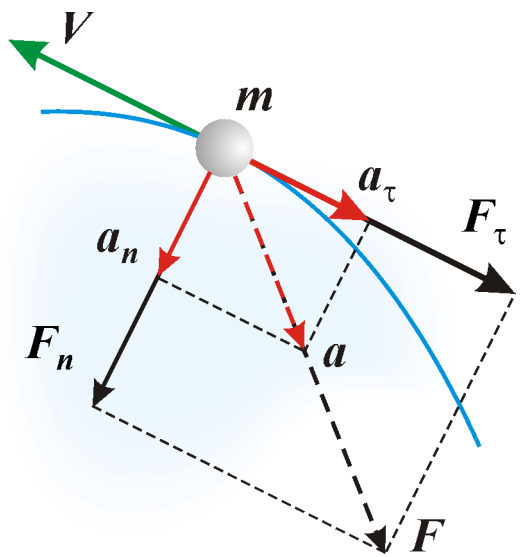
Если на протяжении движения сила остается постоянной ($\bar{F} = \text{const}$), то ее работа равна скалярному произведению этой силы на вектор перемещения точки:

$$A = \int \bar{F} \cdot d\bar{r} = \bar{F} \cdot \int d\bar{r} = \bar{F} \cdot \Delta\bar{r} \;\Rightarrow\; \boxed{A = F\, \Delta r \cos\beta}$$

Мощностью называют величину, определяющую работу, совершаемую силой, в единицу времени, следовательно, мощность равна скалярному произведению силы на скорость точки ее приложения:

$$\frac{dA}{dt} = \bar{F} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} \;\Rightarrow\; \boxed{W = \bar{F} \cdot \bar{V} = FV \cos\alpha}$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ



Изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении равно сумме работ всех сил, действующих на точку на том же перемещении:

$$\boxed{T - T_0 = \Sigma A_i}$$

Здесь T_0 – кинетическая энергия точки в начале пути

Доказательство: распишем тангенциальное ускорение точки следующим образом:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\sigma} \cdot \underbrace{\frac{d\sigma}{dt}}_{V} = V\frac{dV}{d\sigma}$$

и подставим его в основной закон динамики, спроецированный на естественную ось τ:

$$ma_\tau = F_\tau,$$

где F – равнодействующая всех сил, приложенных к точке (то есть $F_\tau = \Sigma F_{i\tau}$). После соответствующих преобразований:

$$mV\frac{dV}{d\sigma} = F_\tau \;\Rightarrow\; mVdV = F_\tau d\sigma \;\Rightarrow\; d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = dA$$

получим выражение:

$$dT = dA \qquad (*)$$

Проинтегрировав это выражение по пройденному пути и с учетом того, что A – это суммарная работа всех сил, приложенных к точке на всем протяжении пути, получим окончательное выражение теоремы об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

$$T - T_0 = \Sigma A_i\,.$$

ТЕОРЕМА МОЩНОСТЕЙ ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

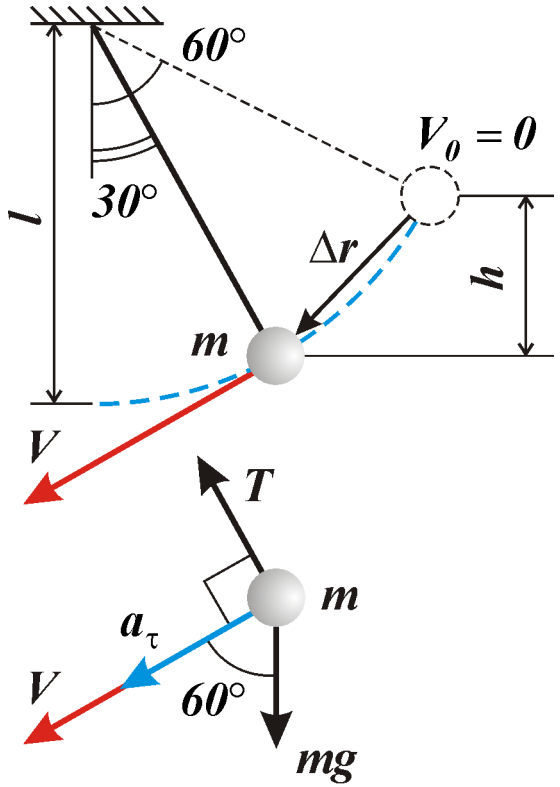
(теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме)

Производная от кинетической энергии материальной точки равна сумме мощностей всех сил, действующих на эту точку:

$$\boxed{\dot{T} \equiv \frac{dT}{dt} = \Sigma W_i}$$

Доказать эту теорему можно, разделив выражение (*) на элементарный отрезок времени dt

Пример 3. Груз массой m, подвешенный на нити длиной l, отклонили от вертикали на угол $60°$ и отпустили без начальной скорости. Найти скорость и касательное ускорение груза в момент, когда нить образует с вертикалью угол $30°$



По теореме об изменении кинетической энергии в интегральной форме и с учетом того, что $V_0 = 0$:

$$\frac{mV^2}{2} = mgh, \qquad h = l(\cos 30° - \cos 60°) = 0{,}37l$$

Отсюда выразим скорость точки:

$$V = \sqrt{2g \cdot 0{,}37l} = 2{,}72\sqrt{l}$$

Применив теорему мощностей, получим:

$$2 \cdot \frac{mV}{2} \cdot a_\tau = mg \cdot V \cdot \cos 60° + T \cdot V \cdot \cos 90°$$

Отсюда выразим касательное ускорение точки:

$$a_\tau = \frac{g}{2}$$

МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

осевые моменты инерции:

относительно оси x:

$$I_x = \int_m (y^2 + z^2)\, dm$$

относительно оси y:

$$I_y = \int_m (x^2 + z^2)\, dm$$

относительно оси z:

$$I_z = \int_m (y^2 + x^2)\, dm$$

центробежные моменты инерции:

относительно осей xy:

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_m x \cdot y\, dm$$

относительно осей xz:

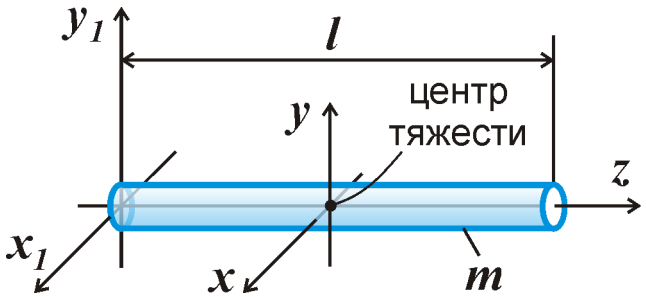
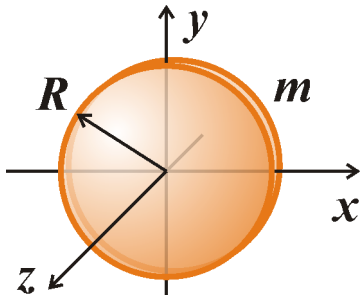
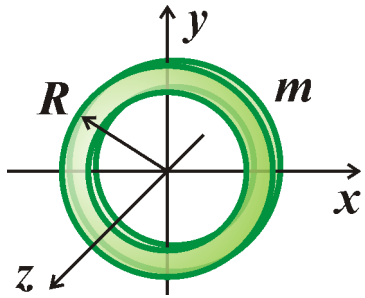
$$I_{xz} = I_{zx} = \int_m x \cdot z\, dm$$

относительно осей yz:

$$I_{yz} = I_{zy} = \int_m y \cdot z\, dm$$

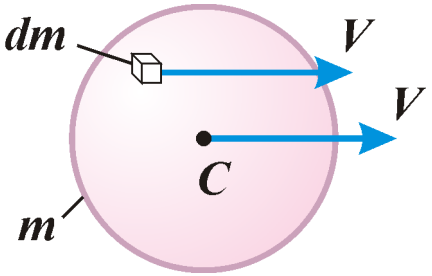
В этих выражениях dm – это масса элементарного объема тела: $\int dm = m$

ОСЕВЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ НЕКОТОРЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

стержень	*тонкий диск*	*тонкое кольцо*
		
$\boxed{I_x = I_y = \frac{ml^2}{12}}$ $\quad I_z \approx 0$	$I_x = I_y = \frac{mR^2}{4}$	$I_x = I_y = \frac{mR^2}{2}$
$\boxed{I_{x_1} = I_{y_1} = \frac{ml^2}{3}}$	$\boxed{I_z = \frac{mR^2}{2}}$	$\boxed{I_z = mR^2}$

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

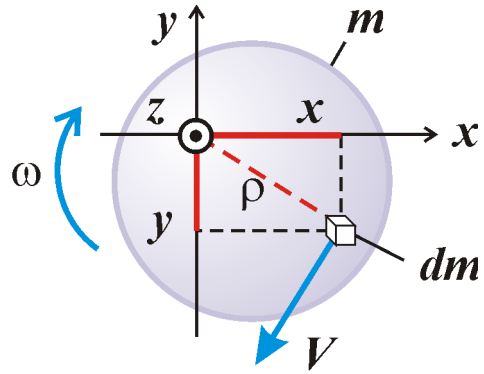
Поступательное движение



$$dT = \frac{V^2 dm}{2} \Rightarrow T = \int dT = \int_m \frac{V^2}{2} dm = \frac{V^2}{2}\int_m dm = \frac{V^2}{2} m$$

$$\boxed{T = \frac{mV^2}{2}}$$, где V – скорость любой точки тела

Вращательное движение



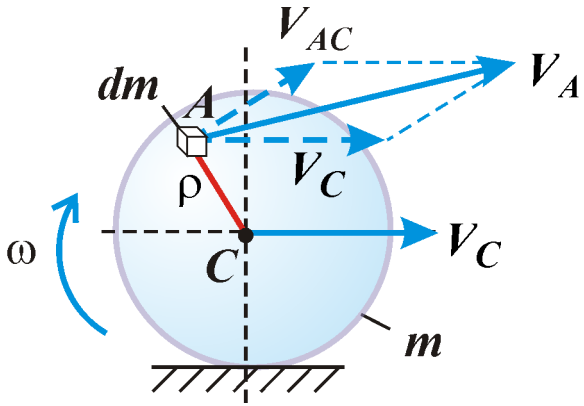
$$T = \int_m \frac{V^2}{2} dm = \int_m \frac{(\omega\rho)^2}{2} dm = \frac{\omega^2}{2}\int_m \rho^2 dm =$$

$$= \frac{\omega^2}{2}\underbrace{\int_m (x^2 + y^2)\, dm}_{I_z} \Rightarrow \boxed{T = \frac{I_z \omega^2}{2}}$$, где z – ось вращения

Плоскопараллельное движение

$$\bar{V}_A = \bar{V}_C + \bar{V}_{AC}$$

$$\bar{V}_{AC} = \bar{\omega} \times \bar{\rho}, \quad V_{AC} = \omega\rho$$



$$T = \int_m \frac{\bar{V}_A^2}{2} dm = \int_m \frac{(\bar{V}_C + \bar{V}_{AC})^2}{2} dm = \int_m \frac{V_C^2}{2} dm +$$

$$+ \int_m \frac{(\omega\rho)^2}{2} dm + \int_m \frac{2\bar{V}_C \cdot \bar{\omega} \times \bar{\rho}}{2} dm = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2} +$$

$$+ \bar{V}_C \cdot \bar{\omega} \times \underbrace{\int_m \bar{\rho}\, dm}_{0} \Rightarrow \boxed{T = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2}}$$

V_C – скорость центра тяжести тела (точка C)

I_C – момент инерции тела относительно оси вращения, проходящей через центр тяжести тела

Пример 4. Определить кинетическую энергию механизма, если $OA = AB = l$, а массы всех трех звеньев механизма равны друг другу: $m_1 = m_2 = m_3 = m$

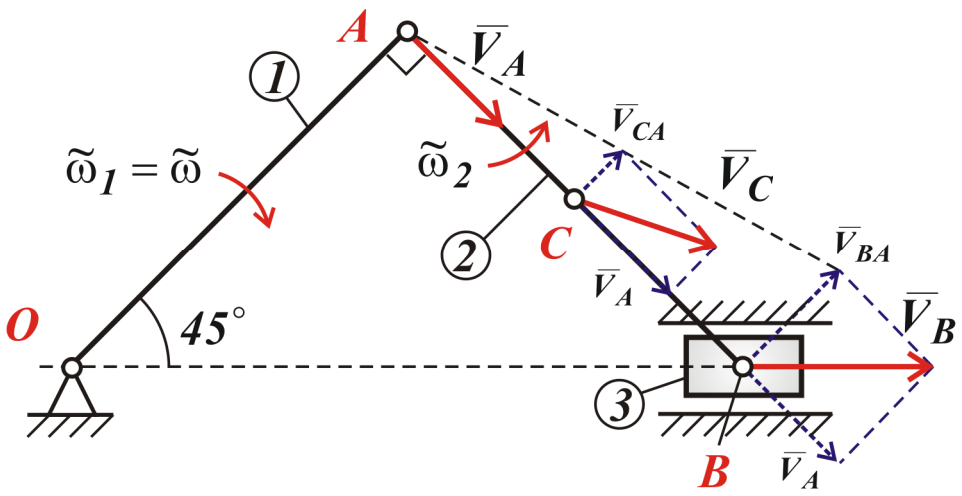
1. Скорости опорных точек и звеньев:

$$V_A = \omega l,\ V_B \cos 45 = V_A \Rightarrow V_B = \sqrt{2}\omega l$$

$$V_{BA} = V_B \sin 45 = \sqrt{2}\omega l \frac{\sqrt{2}}{2} = \omega l$$

$$V_{CA} = \frac{V_{BA}}{2} = 0{,}5\omega l,\ \omega_2 = \frac{V_{BA}}{l} = \omega$$

$$V_C = \sqrt{V_A^2 + V_{CA}^2} = \sqrt{(\omega l)^2 + (\frac{\omega l}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\omega l$$



2. Моменты инерции звеньев: $I_{O1} = \frac{1}{3} m_2 l^2 = \frac{1}{3} m l^2,\ I_{C2} = \frac{1}{12} m_2 l^2 = \frac{1}{12} m l^2$

3. Кинетическая энергия кривошипа: $T_1 = \frac{I_{O1}\omega_1^2}{2} = \frac{ml^2}{3}\frac{\omega^2}{2} = \frac{1}{6} m l^2 \omega^2$

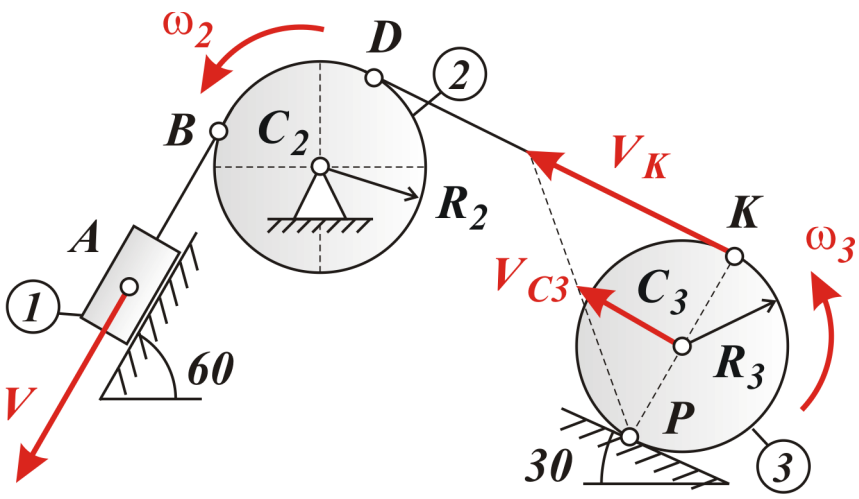
4. Кинетическая энергия шатуна: $T_2 = \frac{I_{C2}\omega_2^2}{2} + \frac{m_2 V_C^2}{2} = \frac{ml^2}{12}\frac{\omega^2}{2} + \frac{m}{2}\frac{5\omega^2 l^2}{4} = \frac{2}{3} m l^2 \omega^2$

5. Кинетическая энергия ползуна: $T_3 = \frac{m_3 V_C^2}{2} = m\omega^2 l^2$

6. Кинетическая энергия механизма: $T = \sum_{i=1}^{3} T_i = \frac{m\omega^2 l^2}{12} + \frac{m\omega^2 l^2}{6} + \frac{2m\omega^2 l^2}{3} = \frac{11}{12} m\omega^2 l^2$

Пример 5. а) Определить зависимость кинетической энергии механической системы от скорости груза V, если известно, что $R_2 = R_3 = r$, $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = 3m$

При решении задачи считать, что трос нерастяжим, проскальзывание между звеньями и тросом, а также между катком и гладкой поверхностью отсутствует



1. Выразим скорости опорных точек и звеньев через скорость груза:

$$V_B = V_D = V_K = V$$

$$\omega_2 = \frac{V_B}{R_2} = \frac{V}{r}, \quad \omega_3 = \frac{V_K}{2R_3} = \frac{V}{2r}, \quad V_{C3} = \frac{V_K}{2} = \frac{V}{2}$$

2. Моменты инерции звеньев №2 и №3 относительно соответствующих центров тяжести:

$$I_{C2} = \frac{m_2 R_2^2}{2} = \frac{2mr^2}{2} = mr^2, \qquad I_{C3} = \frac{m_3 R_3^2}{2} = \frac{3mr^2}{2} = \frac{3}{2}mr^2$$

3. Кинетическая энергия груза: $T_1 = \dfrac{mV^2}{2}$

4. Кинетическая энергия блока: $T_2 = \dfrac{I_{C2}\omega_2^2}{2} = \dfrac{mr^2}{2}\dfrac{V^2}{r^2} = \dfrac{mV^2}{2}$

5. Кинетическая энергия колеса: $T_3 = \dfrac{m_3 V_{C3}^2}{2} + \dfrac{I_{C3}\omega_3^2}{2} = \dfrac{3mV^2}{8} + \dfrac{3mr^2}{4}\dfrac{V^2}{4r^2} = \dfrac{9mV^2}{16}$

6. Суммарная кинетическая энергия механизма:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{mV^2}{2} + \frac{mV^2}{2} + \frac{9mV^2}{16} \Rightarrow \boxed{T = \frac{25}{16}mV^2}$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Изменение кинетической энергии механической системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении внешних и внутренних сил, приложенных к этой механической системе

$$\boxed{T - T_0 = \sum A_i^{внеш} + \sum A_i^{внутр}}$$

T – кинетическая энергия механической системы в заданный момент времени

T_0 – кинетическая энергия механической системы в начальный момент времени

$\sum A_i^{внеш}$ – сумма работ внешних сил (активных и реакций опор), действующих на механическую систему на заданном перемещении

$\sum A_i^{внутр}$ – сумма работ внутренних сил, действующих в механической системе на заданном перемещении

Неизменной называют систему, в которой расстояния между точками при движении системы не изменяются; в частности, такой системой является абсолютно твердое тело или нерастяжимая нить; для неизменной механической системы сумма работ внутренних сил равна нулю:

$$\sum A_i^{внутр} = 0$$

С помощью теоремы об изменении кинетической энергии решают задачи, в которых в число данных и искомых величин входят:

1) действующие силы
2) перемещение системы
3) скорости точек и тел системы в начале и в конце перемещения

ТЕОРЕМА МОЩНОСТЕЙ ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

(теорема об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме)

Производная от кинетической энергии механической системы по времени равна сумме мощностей внешних и внутренних сил, приложенных к этой механической системе

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = \sum W_i^{внеш} + \sum W_i^{внутр}}$$

$\frac{dT}{dt}$ – производная от кинетической энергии механической системы по времени; поскольку в выражение для записи кинетической энергии входит переменная величина скорости, возведенная в квадрат, дифференцировать кинетическую энергию по времени необходимо как сложную функцию, например:

$$T = \frac{mV^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(V^2) = \frac{m}{2} \cdot 2V \cdot \underbrace{\frac{dV}{dt}}_{a_\tau} = mVa_\tau$$

$\sum W_i^{внеш}$ – сумма мощностей внешних сил (активных и реакций опор), действующих на механическую систему

$\sum W_i^{внутр}$ – сумма мощностей внутренних сил, действующих на элементы механической системы

Для неизменной механической системы сумма мощностей внутренних сил равна нулю:

$$\sum W_i^{внутр} = 0$$

РАБОТА И МОЩНОСТЬ ПАРЫ СИЛ

Вспомним определения работы силы и мощности:

Работа силы $\boldsymbol{F}$ на любом конечном перемещении $\Delta \boldsymbol{r}$ равна $\boldsymbol{A} = \int \overline{\boldsymbol{F}} \cdot d\overline{\boldsymbol{r}}$, причем если сила при перемещении механической системы не изменяется, то ее работа равна скалярному произведению этой силы на вектор перемещения точки ее приложения

$$\boxed{\boldsymbol{A} = \overline{\boldsymbol{F}} \cdot \Delta\overline{\boldsymbol{r}}} \qquad \boxed{\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}\ \Delta\boldsymbol{r} \cos(\overline{\boldsymbol{F}}, \Delta\overline{\boldsymbol{r}})}$$

Мощность силы равна скалярному произведению этой силы на вектор скорости точки ее приложения

$$\boxed{\boldsymbol{W} = \overline{\boldsymbol{F}} \cdot \overline{\boldsymbol{V}}} \qquad \boxed{\boldsymbol{W} = \boldsymbol{F}\ \boldsymbol{V} \cos(\overline{\boldsymbol{F}}, \overline{\boldsymbol{V}})}$$

Работа пары сил:

Пара сил с моментом $\boldsymbol{M}$ совершает работу на угловом перемещении $d\boldsymbol{\varphi}$:

$$\boldsymbol{A} = \int \overline{\boldsymbol{M}} \cdot d\overline{\boldsymbol{\varphi}}$$

Работа пары сил с постоянным моментом:

Если при перемещении механической системы момент пары сил не изменяется, то работа этой пары равна скалярному произведению момента на вектор углового перемещения тела под действием этой пары

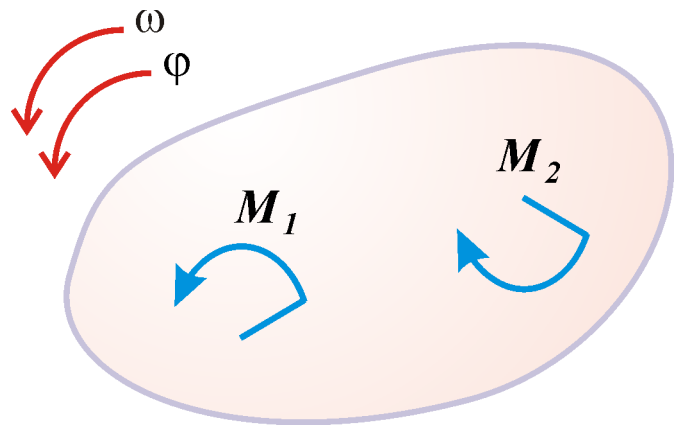
$$\boxed{\boldsymbol{A} = \overline{\boldsymbol{M}} \cdot \overline{\boldsymbol{\varphi}}} \qquad \boxed{\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}\ \boldsymbol{\varphi} \cos(\overline{\boldsymbol{M}}, \overline{\boldsymbol{\varphi}})}$$

Мощность пары сил:

Мощность пары сил равна скалярному произведению момента этой пары на вектор угловой скорости вращения тела

$$\boxed{\boldsymbol{W} = \overline{\boldsymbol{M}} \cdot \overline{\boldsymbol{\omega}}} \qquad \boxed{\boldsymbol{W} = \boldsymbol{M}\ \boldsymbol{\omega} \cos(\overline{\boldsymbol{M}}, \overline{\boldsymbol{\omega}})}$$

Пример: $\overline{\boldsymbol{M}}_1 \uparrow\uparrow \overline{\boldsymbol{\omega}}$, $\overline{\boldsymbol{M}}_2 \uparrow\downarrow \overline{\boldsymbol{\omega}}$



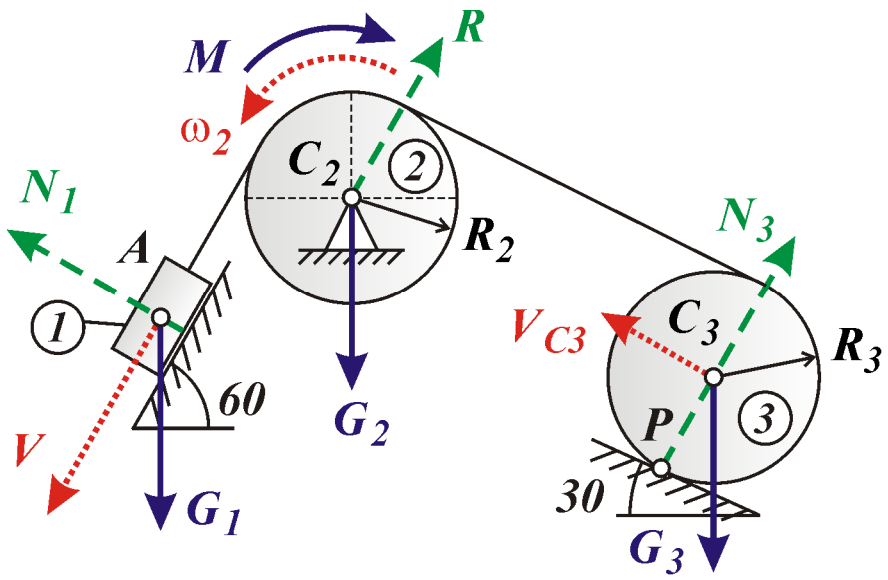
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{M}_1) = \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{\varphi}$$
$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{M}_1) = \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{\omega}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{M}_2) = -\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{\varphi}$$
$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{M}_2) = -\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{\omega}$$

Пример 5 (продолжение). б) Найти суммарную мощность сил, приложенных к механической системе, в зависимости от скорости груза, если к блоку приложена пара сил с моментом $M = mgr$, а трение в системе отсутствует

1. Запишем зависимости скоростей опорных точек и звеньев от скорости груза:

$$\omega_2 = \frac{V}{r}; \quad V_{C3} = \frac{V}{2}$$



2. Мощность внутренних сил равна нулю (так как задана неизменная механическая система)

3. Мощность реакций опор:

$$W(N_1) = N_1 V \cos 90 = 0$$

$$W(R) = 0 \text{ (так как } V_{C2} = 0\text{)}$$

$$W(N_3) = 0 \text{ (так как } V_P = 0\text{)}$$

4. Мощность активных сил:

$$W(G_1) = V_A\, G_1 \cos(\overline{V}_A, \overline{G}_1) = Vmg \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} Vmg$$

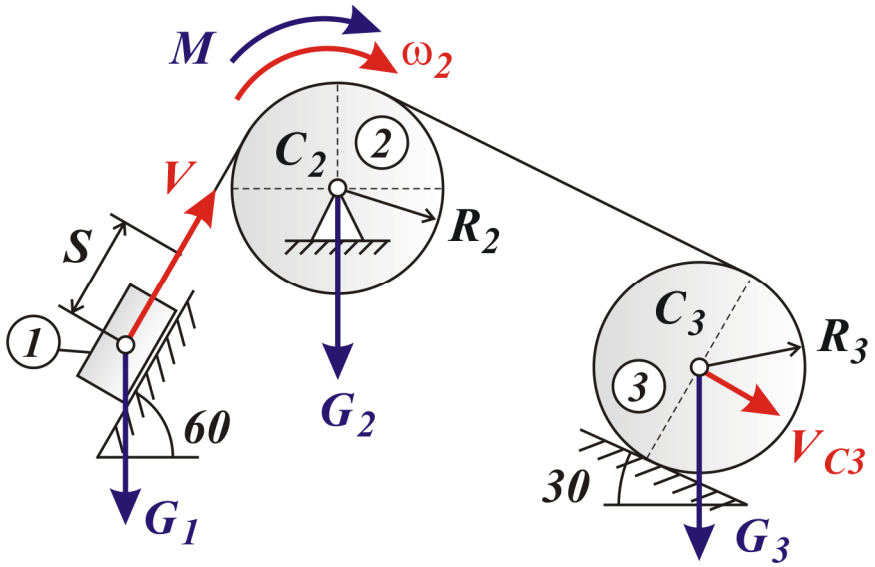
$$W(G_2) = V_{C2}\, G_2 \cos(\overline{V}_{C2}, \overline{G}_2) = 0 \text{, так как } V_{C2} = 0$$

$$W(G_3) = V_{C3}\, G_3 \cos(\overline{V}_{C3}, \overline{G}_3) = -\frac{V}{2} 3mg \cos 60 = -\frac{3}{4} Vmg$$

$$W(M) = \omega_2\, M \cos 180 = -\frac{V}{r} mgr = -Vmg$$

5. Суммарная мощность сил: $\sum W = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} - 1\right) Vmg \Rightarrow \boxed{\sum W = -0{,}89\, Vmg}$

Знак «–» означает, что на самом деле механизм движется в противоположную сторону



в) Найти суммарную работу приложенных к механической системе сил, совершенную на перемещении груза S, в зависимости от перемещения груза

Используем дифференциальную связь между мощностью и работой сил:

$$W = \frac{dA}{dt} \Rightarrow A = \int_0^t W dt$$

$$\sum A = 0{,}89\, mg \int_0^t V dt \Rightarrow \boxed{\sum A = 0{,}89\, mgS}$$

г) Найти зависимость угловой скорости блока от перемещения груза S, если механическая система начала движение из состояния покоя

Используем результаты расчетов, полученные в предыдущих пунктах:

$$T = \frac{25}{16} mV^2,\ T_0 = 0,\ \sum A = 0{,}89 mgS$$

Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

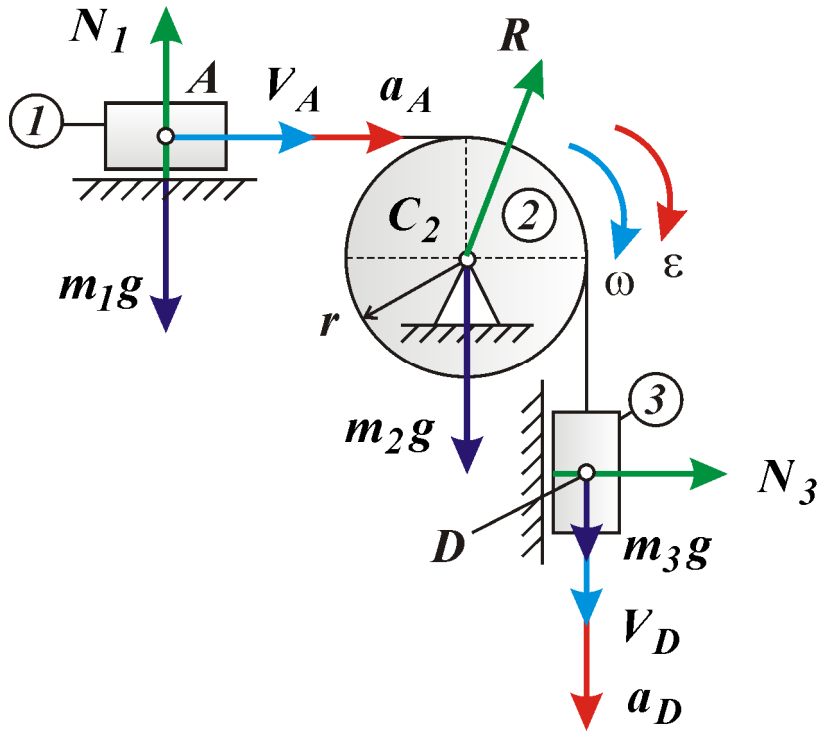
$$T - T_0 = \sum A$$

$$\frac{25}{16} mV^2 = 0{,}89 mgS \Rightarrow \boxed{V = 2{,}39\sqrt{S}} \Rightarrow \omega_2 = \frac{V}{r} \Rightarrow \boxed{\omega_2 = 2{,}39\frac{\sqrt{S}}{r}}$$

д) Найти ускорение груза

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(2{,}39\sqrt{S}) = 2{,}39\frac{d}{dt}(S)^{0{,}5} = 2{,}39 \cdot 0{,}5 \cdot (S)^{-0{,}5} \cdot V = \frac{1{,}19}{\sqrt{S}} \cdot 2{,}39\sqrt{S} \Rightarrow \boxed{a = 2{,}84}$$

Пример 6. Найти угловое ускорение блока, если трос нерастяжим, проскальзывание между звеньями и тросом отсутствует, трения нет, а массы звеньев равны $m_1 = m_2 = m_3 = m$



1. Зададимся скоростью звена №1: пусть $V_A = V$
2. Выразим скорости и ускорения опорных точек и звеньев через скорость и ускорение звена №1:

скорости: $V_D = V_A = V$, $\omega = \dfrac{V_A}{r} = \dfrac{V}{r}$

ускорения: $a_D = a_A = a$, $\varepsilon = \dfrac{a_A}{r} = \dfrac{a}{r}$

2. Момент инерции блока: $I_{C2} = \dfrac{m_2 r^2}{2} = \dfrac{mr^2}{2}$

3. Суммарная кинетическая энергия системы:

$$T = \left[\frac{mV^2}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{mr^2}{2}\cdot\frac{V^2}{r^2}\right] + \left[\frac{mV^2}{2}\right] = \frac{5mV^2}{4}$$

3. Суммарная мощность сил, приложенных к механической системе: $\sum W = m_3 g V_D = Vmg$

4. Производная по времени от кинетической энергии: $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{5}{4} m(2V)a = \dfrac{5}{2} mVa$

5. Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$\frac{dT}{dt} = \sum W \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{2} mVa = Vmg \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{5} g$$

6. Ускорение блока: $\varepsilon = \dfrac{a}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon = \dfrac{2g}{5r}}$

СИЛА ИНЕРЦИИ. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Величина, по модулю равная произведению массы материальной точки на ее ускорение, и направленная в сторону, противоположную ускорению, называется **силой инерции**:

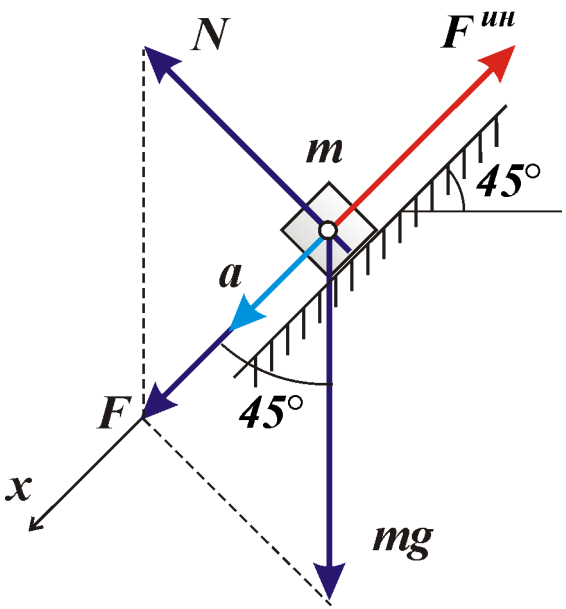
$$\boxed{\overline{F}^{ин} = -m\overline{a}} \qquad \boxed{F^{ин} = ma}$$

Принцип Даламбера для материальной точки: силы, приложенные к материальной точке, вместе с силой инерции образуют уравновешенную систему сил

$$\boxed{\Sigma\overline{F}_i + \overline{F}^{ин} = \overline{0}} \qquad \boxed{\Sigma F_i + F^{ин} = 0}$$

Доказательство следует из второго закона Ньютона: $\Sigma\overline{F}_i = m\overline{a} \;\Rightarrow\; \Sigma\overline{F}_i \underbrace{- m\overline{a}}_{+\overline{F}^{ин}} = \overline{0}$

Пример 7. Найти ускорение материальной точки массой m и действующую на нее силу инерции, если известно, что точка скользит без трения под действием силы тяжести по прямой гладкой поверхности, наклоненной к горизонту под углом $45°$



Суммарная сила, действующая на материальную точку:

$$\overline{F} \equiv \Sigma\overline{F}_i = m\overline{g} + \overline{N}$$

Спроецируем это выражение на ось x:

$$F\cos 0° = mg\cos 45° + N\cos 90° \;\Rightarrow\; F = \frac{\sqrt{2}}{2}mg$$

Ускорение точки: $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}g$

Сила инерции точки: $F^{ин} = ma = \dfrac{\sqrt{2}}{2}mg$

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Если в любой момент времени к каждой из точек системы, кроме фактически действующих на нее внешних сил, приложить соответствующие силы инерции, то полученная система будет находиться в равновесии, и к ней можно будет применять все принципы статики

$$\boxed{\begin{cases} \Sigma \overline{F}_i^{внеш} + \overline{F}^{ин} = \overline{0} \\ \Sigma \overline{M}_O(\overline{F}_i^{внеш}) + \overline{M}_O^{ин} = \overline{0} \end{cases}}$$

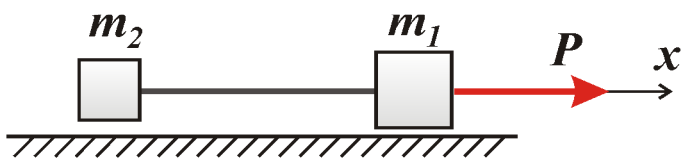
$\Sigma \overline{F}_i^{внеш}$ – сумма внешних сил, приложенных к механической системе

$\Sigma \overline{M}_O(\overline{F}_i^{внеш})$ – сумма моментов внешних сил, приложенных механической системе, относительно некоторого центра O

$\overline{F}^{ин} = \Sigma \overline{F}_i^{ин}$ – **главный вектор системы сил инерции**, приложенных к точкам механической системы

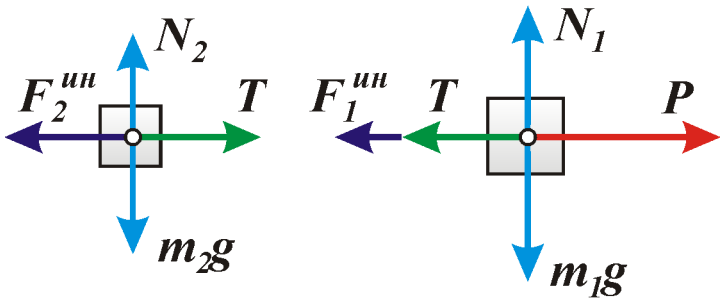
$\overline{M}_O^{ин} = \Sigma \overline{M}_O(\overline{F}_i^{ин})$ – **главный момент сил системы инерции** относительно центра O

Пример 8. Два груза, связанные нитью, скользят без трения по горизонтальной плоскости под действием силы P. Найти ускорение грузов и силу натяжения нити.



Рассмотрим равновесие всей системы в целом с учетом принципа Даламбера:

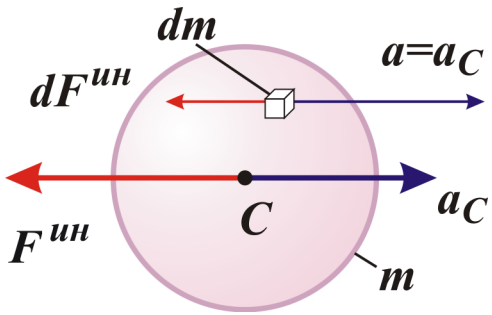
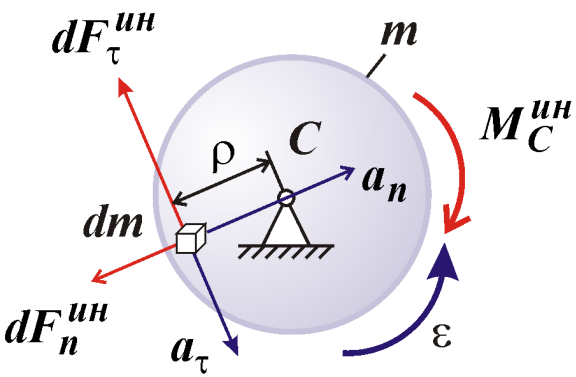
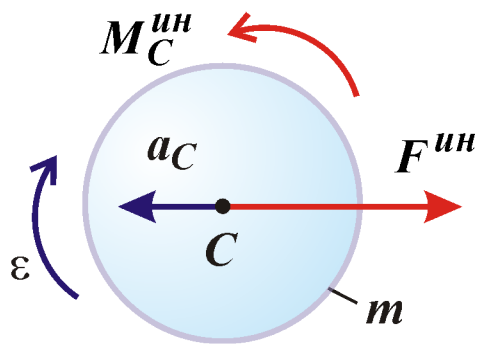
$$\Sigma F_{ix} + \Sigma F_{ix}^{ин} = 0: \; P - m_1 a - m_2 a = 0 \Rightarrow a = \frac{P}{m_1 + m_2}$$



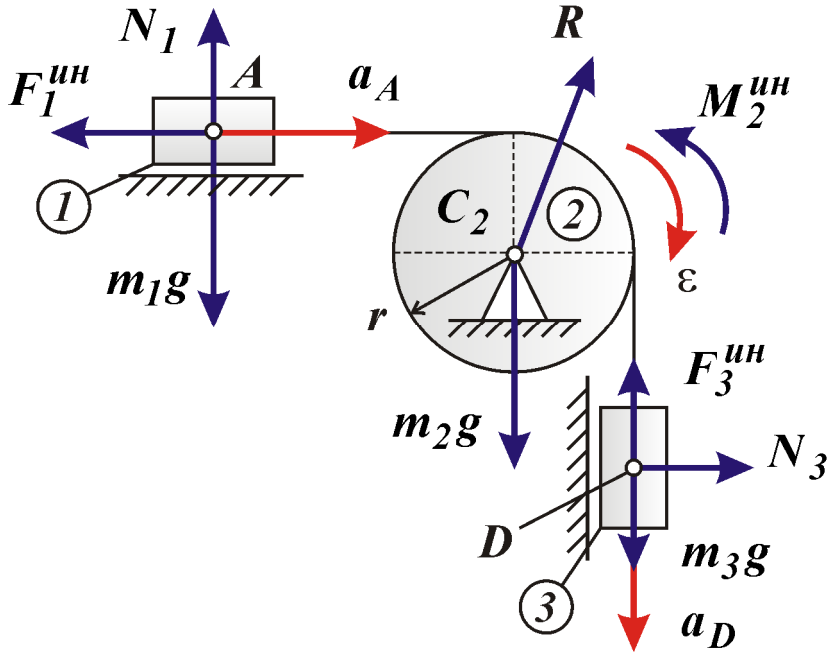
Силу натяжения нити найдем, рассмотрев равновесие второго груза:

$$T - F_2^{ин} = 0 \Rightarrow T = F_2^{ин} = m_2 a$$

ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР И ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ СИЛ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Вид движения твердого тела		Главный вектор и главный момент сил инерции
Поступательное		$\bar{M}_C^{ин} = \bar{0}$, $\bar{F}^{ин} = \int d\bar{F}^{ин} = \int(-\bar{a}_C)\,dm$ $\boxed{\bar{F}^{ин} = -m\bar{a}_C}$ Систему сил инерции приводят к одной равнодействующей силе, которая противонаправлена ускорению и приложена в центре тяжести тела
Вращательное вокруг оси, проходящей через центр тяжести тела		$\bar{F}^{ин} = \bar{0}$ $M_C^{ин} = \int \rho\, dF_\tau^{ин} = \int \rho a^\tau dm = \int \varepsilon \rho^2 dm = \varepsilon \underbrace{\int \rho^2 dm}_{I_C}$ $\boxed{\bar{M}_C^{ин} = -I_C \bar{\varepsilon}}$ Систему сил инерции приводят к одной паре сил, лежащей в плоскости вращения, момент которой противонаправлен угловому ускорению тела
Плоское		$\boxed{\bar{F}^{ин} = -m\bar{a}_C}$ $\boxed{\bar{M}_C^{ин} = -I_C \bar{\varepsilon}}$ Систему сил инерции приводят к одной равнодействующей силе, приложенной в центре тяжести тела и противонаправленой ускорению, и одной паре сил, лежащей в плоскости вращения, момент которой противонаправлен угловому ускорению тела

Пример 9. Найти с помощью принципа Даламбера угловое ускорение блока и силы натяжения в ветвях троса механической системы, рассмотренной ранее (см. пример 6)

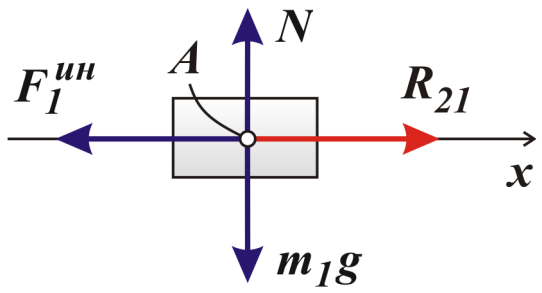


1. Ранее ускорения точек A и D были выражены через угловое ускорение блока следующим образом:

$$a_A = a_D = \varepsilon r$$

2. Момент инерции блока:

$$I_{C2} = \frac{mr^2}{2}$$



3. Рассмотрим равновесие звена №1

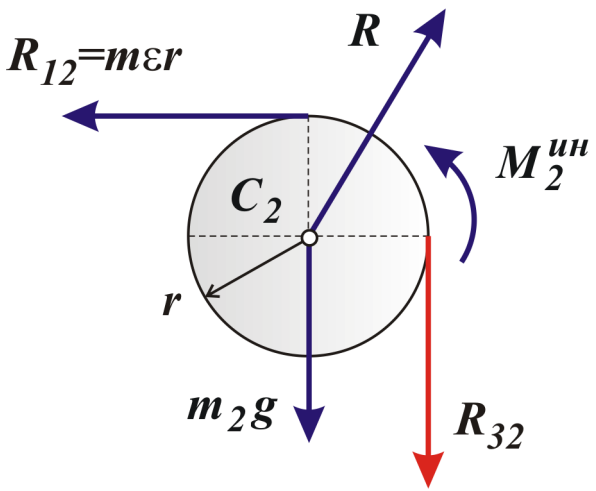
Главный вектор сил инерции, действующих на 1-е звено:

$$F_1^{ин} = m_1 a_A = m\varepsilon r$$

Запишем сумму проекций на ось x всех сил, приложенных к телу с учетом сил инерции:

$$\sum(\overline{F}_i)_x = 0 \Rightarrow -F_1^{ин} + R_{21} = 0 \Rightarrow -m\varepsilon r + R_{21} = 0$$

$$\boxed{R_{21} = m\varepsilon r \ (= R_{12})} \ (*)$$



4. Рассмотрим равновесие звена №2

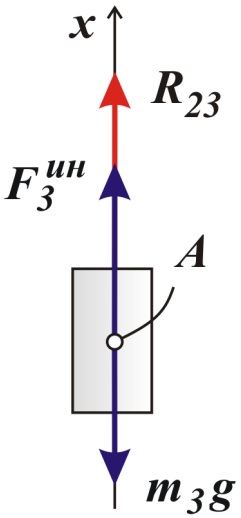
Главный момент сил инерции, действующих на 2-е звено:

$$M_2^{ин} = I_{C2}\varepsilon = \frac{mr^2\varepsilon}{2}$$

Запишем сумму моментов относительно его центра тяжести от всех сил, приложенных к блоку с учетом сил инерции:

$$\sum M_{C2}(\overline{F}_i)_x = 0 \;\Rightarrow\; R_{12}r + M_2^{ин} - R_{32}r = 0$$

$$mr^2\varepsilon + \frac{mr^2\varepsilon}{2} - R_{32}r = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{R_{32} = \frac{3}{2}mr\varepsilon\ (= R_{23})} \quad (**)$$



5. Рассмотрим равновесие звена №3

Главный вектор сил инерции, действующих на 3-е звено: $F_3^{ин} = m_3 a_D = m\varepsilon r$

Сумма проекций на ось y всех приложенных к телу сил с учетом сил инерции:

$$\sum(\overline{F}_i)_y = 0 \Rightarrow F_3^{ин} + R_{23} - m_3 g = 0 \Rightarrow m\varepsilon r + R_{23} - mg = 0$$

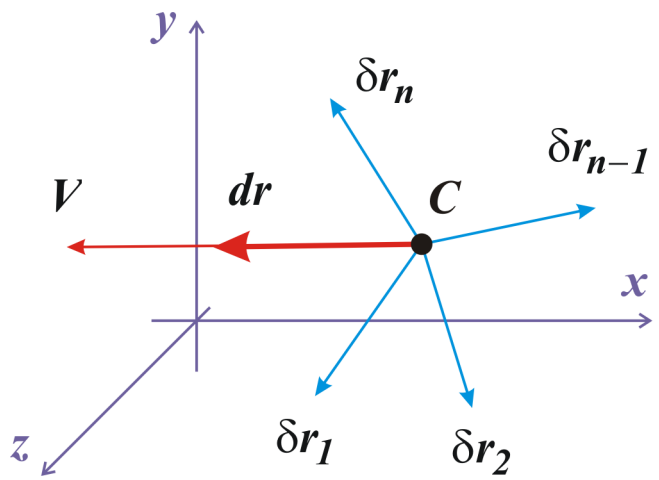
$$\boxed{R_{23} = m(g - \varepsilon r)} \quad (***)$$

6. Приравняем выражения (**) и (***): $\frac{3}{2}mr\varepsilon = m(g - \varepsilon r) \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{2g}{5r}}$

7. Подставим величину ε в выражения (*) и (**): $\boxed{R_{12} = mr\frac{2g}{5r} = \frac{2}{5}mg}$ $\boxed{R_{23} = \frac{3}{2}mr\frac{2g}{5r} = \frac{3}{5}mg}$

Величина углового ускорения блока получилась такой же, что и при решении этой же задачи путем использования теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И ВОЗМОЖНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ



Возможным (виртуальным) перемещением материальной точки называется любое бесконечно малое перемещение этой точки, допускаемое в данный момент времени всеми наложенными на нее связями

δr_1, δr_2, δr_{n-1}, δr_n – возможные перемещения точки C

Действительное перемещение – это одно из возможных перемещений – то, которое реализовалось на самом деле; оно сонаправлено с вектором скорости материальной точки

$d\bar{r} = \bar{V}dt$ – действительное перемещение точки C

Возможным (виртуальным) перемещением механической системы называется любая совокупность бесконечно малых перемещений точек этой системы, допускаемых в данный момент времени всеми наложенными на эту систему связями

Максимальное число независимых между собой возможных перемещений называется **числом степеней свободы** механической системы

Идеальные связи – это такие связи, наложенные на механическую систему, что сумма элементарных работ реакций этих связей на любом возможном перемещении этой системы равна нулю

ПРИМЕРЫ ИДЕАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ: гладкая поверхность, шероховатая поверхность при качении, шарнирные опоры (подвижные и неподвижные), заделка, жесткий стержень

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ:

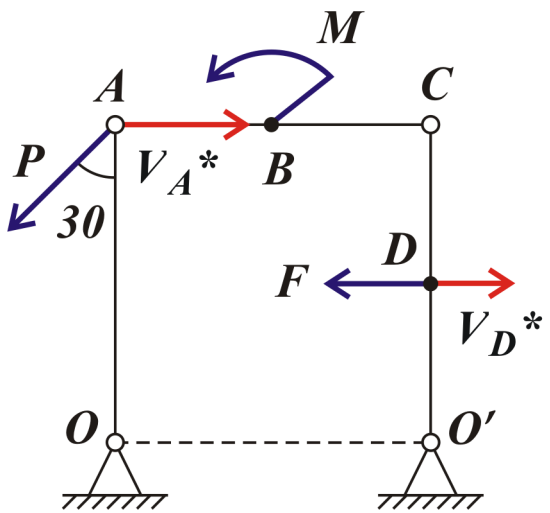
Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ активных сил на любом возможном перемещении была равна нулю

$$\boxed{\sum \bar{F}_i^a \cdot \delta\bar{r}_i = 0}$$

Продифференцировав это выражение, получим ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ СКОРОСТЕЙ:

$\boxed{\sum \bar{F}_i^a \cdot \bar{V}_i^* = 0}$, здесь $\bar{V}^* = \dfrac{\delta\bar{r}}{\delta t}$ – возможная скорость

Пример 10. Определить чему должна быть равна сила F для того, чтобы прямоугольная рама находилась в равновесии; учесть, что $O'D = O'C/2$



1. Вид движения звеньев (если механизм находится в движении):
   OA, $O'C$ – вращательное; AC – поступательное

2. Зададимся возможной скоростью точки A: $V_A^* = V$, тогда
   $$V_C^* = V_A^* = V,\ \omega_{AC}^* = 0,\ V_D^* = 0{,}5V$$

3. Применим принцип возможных скоростей:
   $$P\,V_A^* \cos 120 + M \cdot \omega_{AC}^* + F\,V_D^* \cos 180 = 0 \Rightarrow$$
   $$-0{,}5PV - 0{,}5FV = 0$$
   $$\boxed{F = -P}$$

Знак «–» означает, что на самом деле сила F направлена в противоположную сторону